Universität Würzburg
Lehrstuhl für Physik und ihre Didaktik
Fakultät für Physik und Astronomie

Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an Gymnasien

Einsatz mathematischer Modellbildungssoftware im Physikunterricht am Beispiel von Newton-II

Eingereicht von
Weigel, Simon

Abgabe: 01/2019

Gutachter: Dr. S. Lück

Vorwort

Als ehemaligem Schüler eines sprachlichen Gymnasiums habe ich im Physikunterricht aufgrund der begrenzten Stundenzahl wohl nicht so viel erlebt, wie im naturwissenschaftlichen Zweig eventuell möglich gewesen wäre. Das ist vermutlich auch der Grund, warum ich jedes Mal, wenn ich im Studium eine neue Unterrichtstechnik oder ein größeres Experiment kennengelernt habe, für mich selbst hinterfragt habe, ob und wenn ja wie gewinnbringend man die entsprechenden Elemente notfalls auch ohne die zusätzliche Profilstunde des naturwissenschaftlichen Zweigs einsetzen könnte. Ich freue mich daher sehr, im Zuge dieser Arbeit die Gelegenheit erhalten zu haben, mit Newton-II eines dieser, meiner Meinung nach für jeden Gymnasialzweig geeigneten, Hilfsmittel eventuell auch einem größeren Publikum näherzubringen.

Vor diesem Hintergrund freue ich mich umso mehr über die Unterstützung, die mir aus meiner alten Schule zuteil geworden ist. Insbesondere möchte ich mich deshalb bei meiner ehemaligen Lehrerin Irene Kaindl und meinem ehemaligen Lehrer Sebastian Müller bedanken, die es mir ermöglicht haben, meine im Rahmen dieser Arbeit entworfenen Arbeitsblätter in ihrem Unterricht zu erproben. Ebenfalls danke ich natürlich auch allen Schülern der aktuellen Klasse 10b des Celtis-Gymnasiums Schweinfurt, die sich nicht nur durch die Aufgabenstellungen gekämpft, sondern mir auch wertvolle Rückmeldungen gegeben haben.

Da ich diese Arbeit nicht unbedingt in Rekordzeit verfasst, sondern im Gegenteil eher jede Formulierung gleich mehrfach überarbeitet habe, scheint es mir außerdem angemessen, mich bei all denen für ihre Geduld zu bedanken, die davon betroffen waren. Konkret geht mein Dank daher nicht nur an meinen Betreuer Dr. Stefan Lück sowie natürlich meine Familie, sondern insbesondere auch an Alexander Masur, der jede einzelne Fassung gleich mehrfach korrekturgelesen und die strittigen Textstellen akribisch mit mir diskutiert hat.

Ich hoffe sehr, dass diese Arbeit und das in ihr enthaltene Material tatsächlich Lehrenden und vielleicht sogar Lernenden von Nutzen sein kann.

Simon Weigel
Würzburg, den 12.01.2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung 7

2 Physikalische Modellbildungssysteme 8

2.1 Modelle im Schulunterricht 8

2.2 Mathematische Modellbildung 10

3 Newton-II 13

3.1 Funktionen und Vorbemerkungen für den Schuleinsatz 13

3.2 Verfügbare Lösungsverfahren 15

3.2.1 Eulersches Polygonzugverfahren/Methode der kleinen Schritte 16

3.2.2 Heunsches Trapezverfahren 17

3.2.3 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren 17

3.2.4 Vergleich der unterschiedlichen Verfahren 18

3.2.5 Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitenanpassung 19

4 Exemplarische Einsatzmöglichkeiten 21

4.1 Einführung in Newton-II - Freier Fall ohne Luftwiderstand 21

4.2 Fall mit Luftwiderstand 23

4.3 Red Bull Stratos 29

4.3.1 Allgemeine Informationen 29

4.3.2 Modellierung in Newton-II 30

4.3.3 Einsatz im Schulunterricht 41

4.4 Harmonische Federschwingung 42

4.5 Gedämpfte Federschwingung 43

4.5.1 Vorstellung des Arbeitsblatts 44

4.5.2 Analytische Herleitung der Dämpfungsfälle 48

4.6 Feder-Faden-Pendel 50

5 Schülermeinungen 57

6 Ausblick 59

7 Literaturverzeichnis 61

8 Anhang 65

1 Einführung

Nicht selten passiert es, dass die Beantwortung von mal mehr und mal weniger komplizierten Fragestellungen im Physikunterricht auf einen nicht näher definierten späteren Zeitpunkt oder gar die Uni verschoben werden müssen. Manchmal fehlt den Schülern das mathematische Handwerkszeug und manchmal das physikalische Hintergrundwissen. Manchmal existiert aber auch schlicht keine analytische Lösung. Der bayerische Lehrplan [1] sieht deshalb in der zehnten Klasse die Einführung von numerischen Lösungsverfahren anhand der Methode der kleinen Schritte vor, mit deren Hilfe auch komplizierte mathematische Anfangswertprobleme behandelt werden können. Ihre Anwendung wird jedoch nur für die harmonische Schwingung verbindlich vorgeschrieben und die Untersuchung einer weiteren eindimensionalen Bewegung mit nicht konstanter Kraftwirkung wird lediglich empfohlen. Selbst an naturwissenschaftlichen Gymnasien ist der Profilbereich „Physik am Computer“, der sich inhaltlich gut mit der Verwendung eines derartigen Algorithmus verknüpfen lässt, nur einer unter vielen. Dies hat zur Folge, dass komplexere mechanische Probleme insbesondere an Gymnasien mit anderer Ausrichtung infolge von Zeitmangel zuweilen gar nicht erst untersucht werden. Dadurch wird jedoch mehr aufgegeben, als man meinen könnte, falls man diesen Bestandteil des Lehrplans als simple Rechenübung sieht. Denn werden derartige Lösungsverfahren softwaretechnisch durch die Verwendung von einfach zu bedienenden Simulationen und Modellbildungssystemen geeignet umgesetzt, so kann nicht nur die Realität physikalisch besser beschrieben und die Relevanz des schulischen Wissens für die Umwelt verdeutlicht, sondern auch die ebenfalls zu fördernde Modellbildungskompetenz der Schüler verbessert werden. Da die notwendige Mathematik hierbei in den Hintergrund tritt, ist eine derartige Herangehensweise folglich auch dann möglich, wenn die Methode der kleinen Schritte selbst nicht gelehrt wird.

Da sich bereits viele Autoren die Mühe gemacht haben, die didaktischen Theorien hinter derartigen Modellbildungssystemen ausgiebig zu sammeln und unterschiedliche Ansätze dabei zu kategorisieren und zu vergleichen, werden dahingehende Fragestellungen nur einen geringen Anteil der folgenden Arbeit ausmachen. Stattdessen sollen mit Newton-II [2] nicht nur ein für den Mechanikunterricht geeignetes Numerikprogramm vorgestellt, sondern insbesondere die bereits angedeuteten Möglichkeiten mithilfe konkreter Aufgabenvorschläge und auf diese Software zugeschnittener Arbeitsblätter demonstriert und diskutiert werden.

2 Physikalische Modellbildungssysteme

In der Einleitung wurden einige Begriffe genannt, die ein wenig mehr Aufmerksamkeit verdient haben, als nur in einem einleitenden Nebensatz erwähnt zu werden. Es gilt daher etwas ausführlicher zu klären, was ein Modellbildungssystem überhaupt und wie das für diese Arbeit verwendete Newton-II dabei einzuordnen ist.

2.1 Modelle im Schulunterricht

Modelle spielen meistens schon in der Kindheit eine wichtige Rolle, egal ob in Form eines Modellautos, einer Modelleisenbahn oder eines Modellflugzeugs. Doch was auf den ersten Blick nur ein Mittel zu sein scheint, den frühkindlich beschränkten Geist mit Elementen der Umwelt vertraut zu machen, die er andernfalls noch nicht begreifen könnte, deutet auf ein viel grundsätzlicheres Problem hin. Denn der Mensch tut sich immer schwer, Dinge zu verstehen, die außerhalb seiner eigenen Größenordnung oder gar seiner Wahrnehmung liegen. Sollen also Elemente abseits dieses Bereichs untersucht werden, so ist der Mensch grundsätzlich auf Hilfsmittel angewiesen [3]. Gegenständliche Modelle wie das eingangs erwähnte Modellauto sind deshalb aus der schulischen Bildung auch schon lange nicht mehr wegzudenken. Sie helfen der Lehrkraft eine komplexe Apparatur, die andernfalls nicht untersuchbar wäre – man denke beispielsweise an das menschliche Auge – für Schüler verständlich darzustellen und dabei den Fokus auf das Wesentliche zu lenken. Was genau das Wesentliche ist, hängt dabei jedoch natürlich von der Intention des Erstellers ab. Denn während ein physikalisches Modell des Auges womöglich eine Linse mit variabler Dicke und einen in der Länge veränderbaren Augapfel hat, findet man in einem biologischen Modell wohl eher allerlei Schnittbilder mit unterschiedlich beschrifteten Hautschichten. Bei dieser Überlegung wird schnell klar, dass ein Modell immer auch Vereinfachungen und Idealisierungen enthält und die Wirklichkeit somit niemals originalgetreu abbilden kann.

Neben gegenständlichen Modellen klassifiziert Kircher auch theoretische Modelle im weiteren Sinne [4, pp. 804-806]. Diese weit gefasste Gruppe enthält unter anderem jene teils mathematisch ausformulierten Modelle, die auch in der wissenschaftlichen Forschung eine Rolle spielen und im schulischen Rahmen beispielsweise in Form des Bohrschen Atommodells anzutreffen sind. Bei diesem konkreten Beispiel ist keineswegs das Anschaulichmachen irgendwelcher geometrischer Gegebenheiten sondern vielmehr die Erklärung

spezifischer experimentell ermittelter Eigenschaften das Ziel, um anschließend daraus weitere Erkenntnisse ableiten zu können (vgl. Abb. 2.1.1). Dabei werden jedoch an anderer Stelle des Modells auch Schwächen und Vereinfachungen in Kauf genommen.

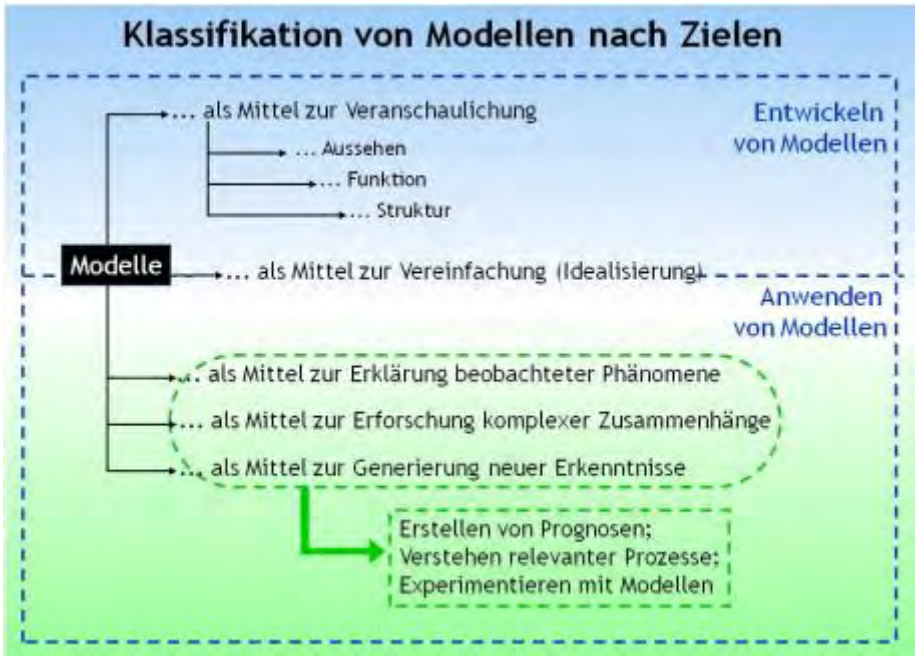


Abb. 2.1.1: Klassifikation von Modellen nach der Zielsetzung bei ihrem Entwurf (Quelle: [5, p. 3])

Diese Einschränkungen, die bei gegenständlichen Modellen noch vergleichsweise gut erkennbar sind, geraten bei theoretischen Modellen aus Schülersicht aber oftmals in Vergessenheit. Stattdessen neigen die Lernenden zu einer naiven Sichtweise, in der sie theoretische Modelle mit der abgebildeten Realität vermischen und sie zum einen als die absolute und immer gültige Wahrheit ansehen und zum anderen regelmäßig auch gegenständlich interpretieren [6]. So fliegen aus Schülersicht die Elektronen gerne mal in geordneten Bahnen um einen Kern herum und das dazugehörige Atom hat natürlich auch dieselbe Farbe wie der mit ihm gebildete Festkörper. An anderer Stelle kann es dagegen passieren, dass die zur mathematischen Beschreibung eines Problems notwendigen Vereinfachungen für manche Schüler die Relevanz des gesamten Physikunterrichts schmälern. So wird beispielsweise über die gesamte Schulzeit hinweg stets in einem luftleeren Raum gerechnet: Wendet der Schüler das Modell auf die Realität an, wird er schnell feststellen, dass eben nicht alle gleich schweren Körper auch gleich schnell fallen. Umgekehrt führt dagegen Denken außerhalb des Modells schnell zu Problemen im Unterricht, beispielsweise bei der Behandlung reibungsfreier Kreisbewegungen aufgrund einer konstanten Zentripetalkraft.
Es ist daher Aufgabe des Lehrers die Schüler für diese Problematiken zu sensibilisieren und von Beginn an zu einem bewussten und verantwortungsvollen Umgang mit Modellen

zu erziehen, was nur dann möglich ist, wenn die Schüler Raum für eigenständiges naturwissenschaftliches Arbeiten eingeräumt bekommen [5]. Man muss sie also dazu anzuleiten, ausgehend von einer physikalischen Problemstellung ein zu deren Beschreibung geeignetes Modell zu entwerfen, mit dem anschließend auftretende Phänomene erklärt und Vorhersagen für die Zukunft getroffen werden können (vgl. [5, p. 5]). Es ist dabei Teil des Lernprozesses, das Modell notfalls immer wieder anzupassen, bis es die Wirklichkeit auf eine geeignete Weise beschreibt, und gleichzeitig die Unterschiede zwischen Realität und Modell zu erkennen und zu akzeptieren. Dies alles sind Forderungen, die sich daher auch im Kompetenzbereich Erkenntnisgewinnung der 2004 von der Kultusministerkonferenz beschlossenen Bildungsstandards zeigen [7] und somit Einzug in den Lehrplan gefunden haben.

2.2 Mathematische Modellbildung

Die für diese Arbeit relevante Möglichkeit besagte Ziele zu erreichen, beinhaltet das Verfahren der mathematischen Modellbildung unter Zuhilfenahme einer Modellbildungssoftware. Die Aufgabe der Schüler ist hierbei ein Problem derart zu analysieren, dass sie ihr anschließend erstelltes Modell nicht nur in Worten, sondern auch mathematisch fundiert beschreiben können. Konkret bedeutet dies, dass sie beispielsweise die auf einen Körper wirkenden Kräfte angeben oder eine Energiebetrachtung durchführen müssen. Die notwendigen Berechnungen, die aus dem aufgestellten Formelgerüst verwertbare Daten – beispielsweise in Form von Tabellen, Graphen oder Animationen – erzeugen, werden im Anschluss daran von der eingesetzten Modellbildungssoftware durchgeführt. Kenntnisse über das dahinterliegende Numerik-Verfahren, Differentiation oder Integration sind also nicht vonnöten, wodurch die Schüler sich auf den physikalischen Vorgang konzentrieren können, ohne jedoch die Mathematik, die nun mal ebenfalls ein essentieller Bestandteil physikalischer Modelle ist, komplett außer Acht zu lassen. Da auf diese Weise auch vergleichsweise realistische Themenstellungen beispielsweise unter Einbeziehung von Reibung behandelt werden können, hilft eine derartige Herangehensweise dabei, die Tragfähigkeit physikalischer Konzepte zu untermauern und einen glaubhaften Alltagsbezug herzustellen, der nicht allein den mathematisch besser gebildeten Oberstufenschülern vorenthalten wird [8].
Der große Vorteil einer mithilfe eines Modellbildungssysteme durchgeführten Simulation gegenüber einer vorgefertigten, die nur klar spezifizierte Änderungen vorab definierter Parameter ermöglicht, ist, dass die Schüler das komplette zugrundeliegende Modell selbst entwerfen und keine Blackbox vorgesetzt bekommen. Stattdessen können und müssen sie

jeden einzelnen Parameter selbst eingeben und der Aufgabenstellung anpassen, wodurch nicht nur die Modellierungskompetenz geschult, sondern auch ein neuartiger Bezug zu altbekannten Formeln geschaffen wird, der über bloßes Einsetzen und Ausrechnen hinausgeht. Um den gewünschten Effekt zu erzielen ist dabei jedoch eine möglichst offene Unterrichtsgestaltung vonnöten, in der die Schüler eigene Überlegungen einbringen und umsetzen können. [8] Auch Elemente von forschendem Lernen können hier Einzug halten, da sich dessen Philosophie, was nicht weiter verwunderlich ist, in gewissen Teilen mit den hier genannten Forderungen deckt [9].

Bei der Auswertung einer Modellrechnung ist dabei immer die Frage zu klären, ob das erstellte Modell mit den Erwartungen übereinstimmt und das untersuchte Problem überhaupt treffend beschreibt, wobei sich dazu insbesondere der Vergleich der Daten mit einem Realexperiment anbietet [10]. Treten hier Diskrepanzen auf, so müssen diese weiter untersucht werden: Wurden bei der Modellierung Vereinfachungen gemacht, die sich im Nachhinein als für den experimentell untersuchten Fall zu einschneidend erweisen? Müssen eventuell die eigenen Vorstellungen auf Grundlage des Modellergebnisses angepasst werden? Vielleicht sorgt aber auch nur ein simpler Vorzeichenfehler für die Abweichung und das zugrundeliegende Modell ist zur Beschreibung des Phänomens ausreichend. Die Schüler erleben dabei einen dynamischen wissenschaftlichen Erkenntnis- und Modellbildungsprozess nach (vgl. [8, p. 1] und Abb. 2.2.1).



Abb. 2.2.1: Schwerpunkte im Gesamtprozess der Modellbildung und Simulation (nach [10]).

Verschiedene Softwareumsetzungen

Auch wenn die Grundidee hinter unterschiedlichen Modellbildungssystemen immer gleich bleibt, gibt es natürlich Unterschiede in der jeweiligen Umsetzung. Grafische Modellbildungssysteme beschreiben ein Modell etwa durch die grafische Darstellung von Wirkungszusammenhängen mit Pfeilen, Formen und Bildern, was einer visuellen Programmiersprache entspricht. Hierdurch ergibt sich eine Flexibilität in der Anwendung, die weit über den schulischen Einsatz hinausgeht. Gleichungsorientierte Systeme beruhen dagegen auf dem einfachen Ansatz ein System durch seine Differentialgleichungen zu beschreiben und diese anschließend zu lösen. In Abb. 2.2.2 sind einige von Lück bezüglich der Art der

Dateneingabe und -ausgabe sortierten und in der Praxis erprobten Programme zur Modellierung verschiedener Probleme aufgelistet.

Eingabe \ Ausgabe	Nur Diagramme und Tabellen	Zusätzlich Animationen
Grafisch	STELLA, Dynasys Powersim, Coach 6	VisEdit/PAKMA JPAKMA
Gleichungsorientiert	Newton-II	Modellus 4

Abb. 2.2.2: Vergleich unterschiedlicher Modellbildungssysteme nach Art der Dateneingabe und -ausgabe (nach [8, p. 3])

Diese im Jahr 2011 angefertigte Liste ist insofern nicht mehr ganz aktuell, als VisEdit, PAKMA und JPAKMA inzwischen nicht mehr verfügbar bzw. unter aktuellen Betriebssystemen nicht mehr lauffähig sind. Stattdessen hat das kostenpflichtige Coach in seiner aktuellen Version 7 anscheinend Funktionen zur Animationsausgabe erhalten. Zu den übrigen Programmen sei noch gesagt, dass das ebenfalls kostenpflichtige STELLA wohl mit Abstand das vielseitigste der bisher genannten Werkzeuge ist und insbesondere auch im professionellen Bereich zum Einsatz kommt. Hierdurch ergibt sich jedoch ein Funktionsumfang, der für den Schuleinsatz übertrieben scheinen mag, weswegen sich für manche Aufgaben auch das schon deutlich ältere und auch etwas instabilere Dynasys noch immer anbietet. Im Bereich der gleichungsorientierten Modellbildungssysteme zeichnet sich dagegen das als Grundlage für diese Arbeit ausgewählte Newton-II insbesondere durch seine auf das Wesentliche beschränkte und durch den Verzicht auf Differentiale auch für Mittelstufenschüler leicht verständliche Benutzeroberfläche aus. Diese Fokussierung geht aber natürlich ein wenig zu Lasten des Funktionsumfangs, sodass im Vergleich zu Modellus 4 nur Graphen und Tabellen ausgegeben werden können. Zumindest in Unterfranken ist Newton-II jedoch, nach einer vergleichsweise aktuellen Umfrage aus dem Jahr 2014, die neben Excel am häufigsten zur Modellbildung[1] eingesetzte Software [11], was ebenfalls dafür spricht, es in dieser Arbeit zu verwenden. Für einen detaillierten Vergleich der verbleibenden Optionen sei an dieser Stelle noch einmal auf den bereits erwähnten Artikel von Lück und Wilhelm [8], sowie eine von letzterem betreute Hausarbeit [12] verwiesen.

[1] Der Autor der zitierten Umfrage stellt aufgrund der hohen Verwendungszahlen von Excel infrage, ob die Programme tatsächlich, wie angegeben, immer zur Modellbildung eingesetzt wurden. Sowohl Excel als auch Newton-II lassen sich problemlos nur für das reine Darstellen von Diagrammen einsetzen.

3 Newton-II

Das für die weitere Arbeit verwendete Newton-II ist ein einfach gehaltenes gleichungsorientiertes und von Lück entwickeltes Modellbildungssystem der Würzburger Fakultät für Physik und ihre Didaktik. Auch wenn seine Funktionen in den letzten Kapiteln bereits angedeutet wurden, soll nun noch etwas genauer auf sie eingegangen werden. Für eine ausführliche Erklärung der einzelnen Bedienschritte muss jedoch auf die online verfügbaren Handbücher verwiesen werden [2].

3.1 Funktionen und Vorbemerkungen für den Schuleinsatz

Das grundsätzliche Bedienungsprinzip des Programms beruht darauf, die auf einen Körper wirkende Beschleunigung, sowie seinen Anfangsort und seine anfängliche Beschleunigung anzugeben. Aus diesen Daten werden anschließend mithilfe numerischer Näherungsverfahren, auf die im folgenden Kapitel noch genauer eingegangen wird, Beschleunigung, Geschwindigkeit und Ort des Körpers zu zukünftigen Zeitpunkten bestimmt. Diese Daten werden von Newton-II anschließend sowohl in bis zu drei Diagrammen – die Belegung und Skalierung der Achsen ist dabei frei wählbar – als auch auf Wunsch hin tabellarisch ausgegeben. Zur Eingabe der Beschleunigung wird dabei – der Name Newton-II lässt es bereits vermuten – der schülergerechte Ansatz gewählt, sie gemäß dem zweiten newtonschen Axiom grundsätzlich als

$$a = \frac{F}{m}$$

bzw. im mehrdimensionalen Fall komponentenweise als

$$ax = \frac{Fx}{m} \qquad ay = \frac{Fy}{m} \qquad az = \frac{Fz}{m}$$

zu definieren. Die Kraft kann anschließend zusammen mit allen weiteren benötigten Variablen durch zeilenweise Eingabe definiert werden, wobei hierbei auch das griechische Alphabet sowie einige vordefinierte Variablen zur Verfügung stehen. Um den Einfluss von Parametern auf den Verlauf der Graphen zu untersuchen, besteht außerdem die Möglichkeit Schieberegler zu erstellen, mit deren Hilfe jene kontinuierlich verändert werden können. Dabei sollte jedoch beachtet werden, dass die regelmäßige Neuberechnung von Daten einiges an Zeit beanspruchen kann und zudem in der aktuellen Version des Programms keine Möglichkeit besteht, eine laufende Berechnung abzubrechen, da die Benutzeroberfläche während dieses Vorgangs nicht bedienbar ist. Aus diesem Grund sollte beim Einsatz der

Schieberegler eine eher geringe Zahl von Stützstellen gewählt oder die automatische Neuberechnung werde. Um besagte Einstellung vorzunehmen, bietet Newton-II die Möglichkeit entweder die Gesamtzahl der zu berechnenden Werte n oder den zeitlichen Abstand dt zwischen ihnen anzugeben. Die Länge der insgesamt zu berechnenden Zeitspanne Δt muss jedoch immer angegeben werden. Zusätzlich bietet Newton-II noch die Möglichkeit, neben den numerisch berechneten Werten auch den Graphen einer Vergleichsfunktion sowie vorher experimentell ermittelte Vergleichswerte einzuzeichnen. Diese können anschließend genutzt werden, um das berechnete Modell mit der Wirklichkeit zu vergleichen oder um eine Parameteranpassung durchzuführen. Die folgende Abbildung verortet die soeben beschriebenen Funktionen in der Benutzeroberfläche des Programms:

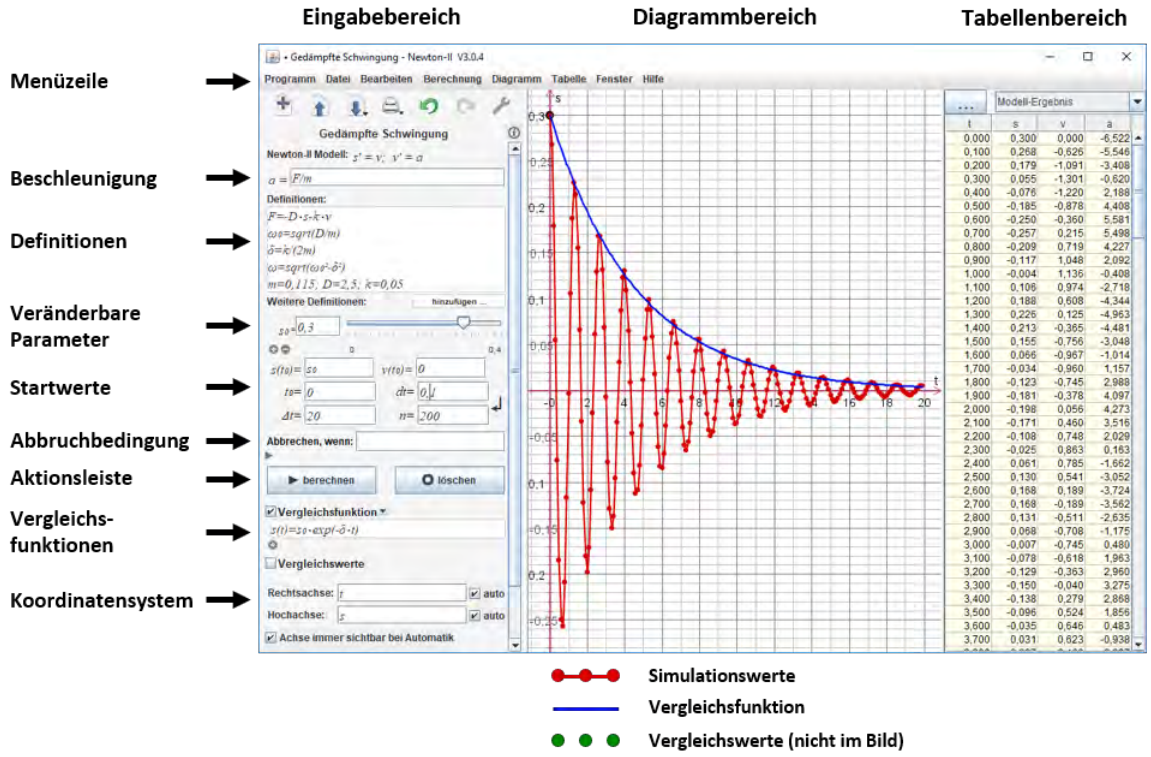


Abb. 3.1.1: Benutzeroberfläche von Newton-II

Wie man sieht, verlangt die Bedienung den Schülern tatsächlich keine tiefgehenden mathematischen oder gar programmspezifischen Kenntnisse wie die Verwendung einer eigenen Syntax ab. Dennoch müssen sie für die Arbeit mit Newton-II auf jeden Fall mit dem gleichnamigen Gesetz und darauf aufbauend mit der „Newton-Maschine“ vertraut sein. Sie müssen also in der Lage sein, die auf einen Körper wirkende Gesamtkraft $F(s, v, t)$ als Summe der wirkenden Einzelkräfte darzustellen. Außerdem müssen sie verstehen, dass sich damit die Beschleunigung $a(s, v, t)$ dieses Körpers berechnen lässt, aus der sich wiederum mit erstmal nicht näher benannten mathematischen Methoden Ort s und Geschwindigkeit v

zum Zeitpunkt t ergeben. Newton-II kennt dabei keine Einheiten, weswegen die Schüler selbst darauf achten müssen, die richtigen Größenordnungen (z.B. SI-Einheiten) zu wählen. Mit diesen Grundkenntnissen ist ein gewinnbringender Einsatz der Software für einfache Aufgaben bereits relativ früh möglich. Weiterführend hilft es jedoch enorm, wenn die Schüler mit der grundsätzlichen Funktionsweise eines Numerikprogramms vertraut sind und im günstigsten Fall bereits selbst die Methode der kleinen Schritte angewandt haben. Hierdurch erhalten sie ein tiefergehendes Verständnis für die Bedeutung der Parameter Δt und dt, die ohnehin oftmals zu Schwierigkeiten führen. Diese Grundlagen können prinzipiell bereits in der neunten Klasse gelegt werden, sind lehrplanmäßig aber erst in der zehnten Jahrgangsstufe gefordert. Dabei muss auch bedacht werden, dass die Schüler zuvor immer nur Gleichungen gelöst haben, bei denen sämtliche Parameter bekannt waren. Bezeichnend dafür ist die Tatsache, dass viele Neuntklässler in einer Unterrichtsstunde bei der Arbeit mit Newton-II deshalb trotz vorherigem Hinweis die Geschwindigkeit v als Konstante angesehen und entsprechend falsch definiert haben. Davon abgesehen sollten die Schüler je nach Kenntnisstand bei einer der Aufgabenstellung angemessenen Wahl von dt unterstützt werden, da falsche Einstellungen großen Einfluss auf das Ergebnis haben können. Ein weiterer typischer Fehler dergestalt, dass häufig vergessen wird die Startwerte festzulegen, ist dagegen eher trivial.
Um diese und weitere Fehler möglichst zu vermeiden und den Schülern den Einstieg in die Arbeit mit der Software zu erleichtern, wurde im Rahmen dieser Arbeit auch ein zu diesem Zweck geeignetes und in Kapitel 4.1 vorgestelltes Tutorium entworfen.

3.2 Verfügbare Lösungsverfahren

Newton-II bietet verschiedene numerische Verfahren zur Lösung des aufgestellten Differentialgleichungssystems an, die sich in ihrer Effektivität und Genauigkeit stark unterscheiden, wodurch die Wahl Einfluss auf das Modellergebnis hat. Diese Verfahren werden im Folgenden kurz vorgestellt. Da eine detaillierte Behandlung aller mathematischen Hintergründe den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, muss jedoch für weitergehende Informationen zur mathematischen Gültigkeit und zur Herleitung der Lösungsmethoden auf die einschlägige Literatur verwiesen werden, wobei insbesondere das speziell für Physiker verfasste und diesem Kapitel hauptsächlich zugrunde liegende Werk von Herrmann [13] genannt werden sollte.

3.2.1 Eulersches Polygonzugverfahren/Methode der kleinen Schritte

Ein sehr einfaches und deshalb auch in den Lehrplan aufgenommenes Verfahren zur Lösung einer Bewegungsgleichung der Form $a = f(t, v, s)$ ist das Eulersche Polygonzugverfahren [13, p. 349], das im schulischen Kontext auch als Methode der kleinen Schritte bezeichnet wird. Die Grundidee ist dabei auch für Schüler recht einleuchtend: Man nimmt die Beschleunigung einfach für gleichgroße Zeitbereiche dt, die man auch als Schrittweite bezeichnet, jeweils als konstant an und benutzt fortan die bekannten Gleichungen für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung. Dazu legt man induktiv Zeitmarken t_i durch $t_{i+1} = t_i + \mathrm{dt}$ fest und definiert darauf aufbauend den für den echten Ort $s(t_i)$ angenäherten Wert durch s_i und die genäherte Geschwindigkeit entsprechend durch v_i. Für jeden dieser Zeitbereiche ist die Beschleunigung $a_i := f(t_i, v_i, s_i)$ konstant. Da somit zusätzlich

$$a_i = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\mathrm{d}t}$$

gilt, folgt leicht die zur Berechnung notwendige Formel:

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot dt \qquad (3.2.1)$$

Der neue Ort ergibt sich dann aus der bekannten Gleichung

$$s_{i+1} = s_i + v_i \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot a_i \cdot dt^2 \qquad (3.2.2)$$

Mit diesen Werten kann man nun auch die neue Beschleunigung berechnen und für den nächsten Zeitabschnitt wieder von vorne beginnen. So ergibt sich eine mal mehr mal weniger genaue Annäherung der echten Lösungen $v(t)$ und $s(t)$.

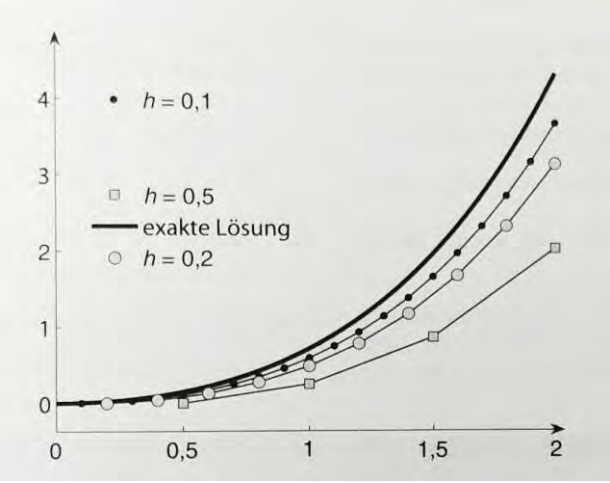


Abb. 3.2.1: Annäherung einer Lösungsfunktion mithilfe des Euler-Verfahrens bei unterschiedlichen Schrittweiten h Quelle: [14, p. 49]

Leitet man diese Beziehungen etwas allgemeiner, beispielsweise mithilfe einer Taylorentwicklung, her, so lassen sich dieses und alle folgenden Verfahren – gegebenenfalls unter Verwendung von mehrdimensionalen Vektoren – auf nahezu beliebige Systeme anwenden.[2] Das Euler-Verfahren besticht dabei zwar durch seine Einfachheit, jedoch nicht unbedingt durch seine Genauigkeit. Da die Berechnungen ohnehin von einem Computer durchgeführt werden, verwendet man daher für gewöhnlich etwas aufwendigere Methoden.

3.2.2 Heunsches Trapezverfahren

Eines davon ist das Heunsche Trapezverfahren [14, p. 48], das wiederum auf einer modifizierten Version des Euler-Verfahrens beruht, wodurch die Grundidee gleich bleibt. Statt aber wie in Formel (3.2.1) direkt die jeweilige Beschleunigung a_i einzusetzen, wird ein Mittelwert aus der alten Beschleunigung a_i und derjenigen Beschleunigung a'_{i+1} gebildet, die sich für diesen Schritt aus dem Euler-Verfahren ergeben hätte. Um $a'_{i+1} = f(t_{i+1}, v'_{i+1})$ zu berechnen, muss folglich die bekannte Gleichung (3.2.1) und gegebenenfalls auch (3.2.2) gelöst werden.

Die gesamte Formel für den (i+1)-ten Schritt beim Trapezverfahren lautet daher

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2} \cdot \big(f(t_i, v_i) + f(t_{i+1}, v_i + dt \cdot a_i)\big) \cdot dt \qquad (3.2.3)$$

Alles Weitere folgt analog zum Euler-Verfahren.

3.2.3 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Das Runge-Kutta-Verfahren ist von den bisher vorgestellten Verfahren wohl das am weitesten verbreitete [13, p. 354] und stellt genaugenommen eine ganze Klasse von Verfahren mit unterschiedlichen Ordnungen dar. Aufgrund seiner hohen Genauigkeit bei nur geringfügig vergrößertem Aufwand, ist dieses Verfahren auch das in Newton-II standardmäßig verwendete. Das Trapezverfahren wird dabei dahingehend erweitert, dass gleich mehrere Hilfsvariablen eingeführt werden. Ein vierstufiges Runge-Kutta-Verfahren sähe, dem bisherigen Schema mit Beschleunigungen und Geschwindigkeiten folgend, so aus:

$$a'_{i+1} = f\left(t_i + \frac{dt}{2}, v_i + \frac{\mathrm{d}t}{2} \cdot a_i\right)$$

[2] Tatsächlich existieren einige mathematische Einschränkungen, auf die an dieser Stelle jedoch nicht weiter eingegangen wird und die für den schulischen Einsatz auch keine Rolle spielen. Stattdessen sei hiermit noch einmal auf die eingangs erwähnte Literatur verwiesen.

$$a''_{i+1} = f\left(t_i + \frac{\mathrm{d}t}{2}, v_i + \frac{\mathrm{d}t}{2} \cdot a'_{i+1}\right)$$

$$a'''_{i+1} = f(t_{i+1}, v_i + \mathrm{d}t \cdot a''_{i+1})$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(a_i + 2a'_{i+1} + 2a''_{i+1} + a'''_{i+1}) \cdot \mathrm{d}t$$

3.2.4 Vergleich der unterschiedlichen Verfahren

Nachdem nun mehrere Lösungsverfahren vorgestellt wurden, stellt sich die Frage, wie sie sich im Ergebnis unterscheiden. Die Mathematik hat zu diesem Zweck unter anderem die Begriffe Konvergenz und Stabilität eingeführt [13, pp. 357-382]. Für die oberflächliche Bewertung ist die Konvergenz von diesen Zweien wohl am wichtigsten, die ein Maß dafür ist, wie groß der globale Fehler bei der Anwendung eines bestimmten Verfahrens ist, also grob gesagt die Abweichung der genäherten Lösungen v_i von den tatsächlichen Lösungen $v(t_i)$. Geht dieser Fehler bei genügend kleinem $\mathrm{d}t$ für alle v_i gegen 0, so nennt man das entsprechende Verfahren konvergent für die Anfangswertaufgabe. Um ein Maß dafür anzugeben, wie schnell die Näherungen gegen die tatsächliche Lösung streben, definiert man damit die sogenannte Konvergenzordnung p, welche für die praktische Anwendung einen recht konkreten Nutzen hat. Denn verkleinert man die Schrittweise eines Verfahrens mit Konvergenzordnung p um den Faktor 10, so wird das Ergebnis – bei ausreichend kleiner Schrittweite – in etwa um den Faktor 10^p genauer. Die folgende Abbildung veranschaulicht diese Behauptung und verifiziert dadurch auch, warum das Runge-Kutta-Verfahren für professionelle Berechnungen grundsätzlich bevorzugt wird.

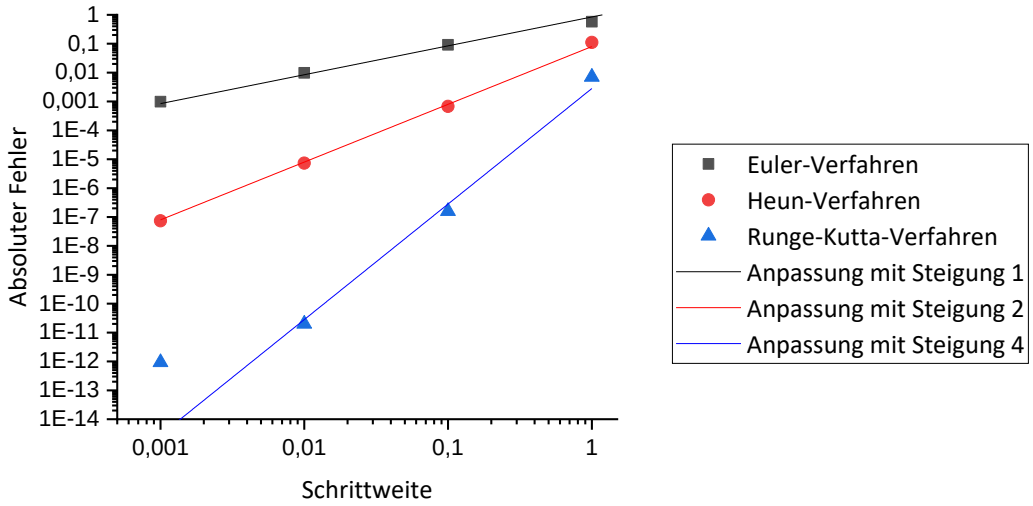


Abb. 3.2.2: Abweichung verschiedener Lösungsverfahren vom exakten Wert an der Stelle t = 10 bei unterschiedlichen Schrittweiten. Testproblem ist die Differentialgleichung $a(t) = v \cdot cos(t)$, $v(0) = 1$ mit exakter Lösung $v(t) = exp(\sin t)$. Die Ergebnisse wurden auf mathstools.com berechnet.

Gleichzeitig lässt sich hier aber bereits am letzten Ergebnis des Runge-Kutta-Verfahrens erahnen, dass sich dieses Schema nicht beliebig fortsetzen lässt. Denn mit zunehmender Zahl von Rechenschritten nimmt auch die Bedeutung von unvermeidbaren Rundungsfehlern zu, sodass die Ergebnisse bei zu geringer Schrittweite auch wieder schlechter werden können. Ab wann dieser Effekt eintritt, hängt vom verwendeten Verfahren, der Anzahl der bisherigen Rechenschritte und insbesondere von den bei der Implementierung verwendeten Datentypen, also vereinfacht ausgedrückt der Anzahl der gespeicherten Nachkommastellen ab. Für die Arbeit mit Newton-II spielt er jedoch keine Rolle.
Was dagegen relevant werden kann, ist die eingangs ebenfalls erwähnte Stabilität. Sie beschreibt, ob ein Verfahren stabil gegenüber Störungen, beispielsweise durch die eben genannten Rundungsfehler, ist. Dazu sei nur so viel gesagt, dass alle hier vorgestellten expliziten Verfahren nur bis zu einer gewissen Schrittweite stabil bleiben. Außerdem können starke Schwankungen der Werte um die tatsächlichen Lösungen auftreten, wie sie das Euler-Verfahren beispielsweise bereits bei Berechnung einer harmonischen Schwingung erzeugt.

3.2.5 Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitenanpassung

Bei genügend kleiner Schrittweite erreicht man jedoch meist mit allen Methoden eine gute Näherung. Doch für gewöhnlich ist im Vorfeld nicht klar, was überhaupt genügend kleine Werte sind. Zudem sind die für eine gewünschte Genauigkeit benötigten Schrittweiten während einer fortlaufenden Berechnung auch nicht immer gleich groß, weswegen bei konstant großem Δt in manchen Intervallen unnötig viele und in anderen wiederum zu wenige Werte berechnet werden. Um diesem Problem zu begegnen, ist in Newton-II auch ein Verfahren mit automatischer Schrittweitenanpassung implementiert, dessen grundsätzliche Funktionsweise kurz vorgestellt werden soll.
Wie bereits erwähnt, gibt es nicht nur ein einziges Runge-Kutta-Verfahren, sondern viele verschiedene, die sich in ihrer Ordnung unterscheiden. Um nun basierend auf dem klassischen Verfahren vierter Ordnung für jeden Schritt die notwendige Schrittweite bestimmen zu können, vergleicht man den berechneten Wert mit dem Ergebnis eines Verfahrens höherer Ordnung. Liegt die Differenz oberhalb einer vorher festgesetzten Fehlerschranke, so wird der Wert verworfen und mit geringerer Schrittweite erneut berechnet, andernfalls wird er als Grundlage für den nächsten Schritt verwendet. Dabei nutzt man als Verfahren höherer Ordnung möglichst eines, dessen Zwischenschritte weitgehend identisch mit dem

zugrundeliegenden Verfahren sind, um die Rechenzeit kurzzuhalten. Dabei ergibt sich durch die regelmäßige Veränderung der Schrittweite jedoch trotzdem die Problematik, dass Werte nicht mehr zu beliebigen vorher gewählten Zeitpunkten berechnet werden können, sondern unregelmäßig verteilt sind. Um dies zu vermeiden, wird, falls nötig, bei jedem Schritt hauptsächlich auf Basis der ohnehin notwendigen Zwischenschritte, zusätzlich noch ein Interpolationspolynom berechnet, das sich mit dem des vorherigen Abschnitts stetig und differenzierbar verbindet. Mit seiner Hilfe kann nun auf die benötigten Werte geschlossen werden. Für eine deutlich vollständigere Beschreibung des soeben Umrissenen sei auf den nach Aussage von Lück der Implementierung in Newton-II zugrundeliegenden Artikel verwiesen [15].

Eine derartige Fehlersteuerung erhöht nicht nur die grundsätzliche Genauigkeit eines Verfahrens, sondern kann auch notwendig sein, um bestimmte Probleme überhaupt in akzeptabler Zeit lösen zu können. Konkret kann man dazu eine durch eine abstandsabhängige Zentralkraft verursachte Kreisbewegung betrachten, wie sie beispielsweise in der Astronomie relevant ist. Bei einer ausreichend geringen Geschwindigkeit des kreisenden Körpers kommt es dabei unter Einsatz eines Verfahrens mit konstanter Schrittweite zu einer durch Rechenfehler bedingten Aufweitung der Bahn, die man bei Verwendung von Schrittweitensteuerung nicht beobachten kann.

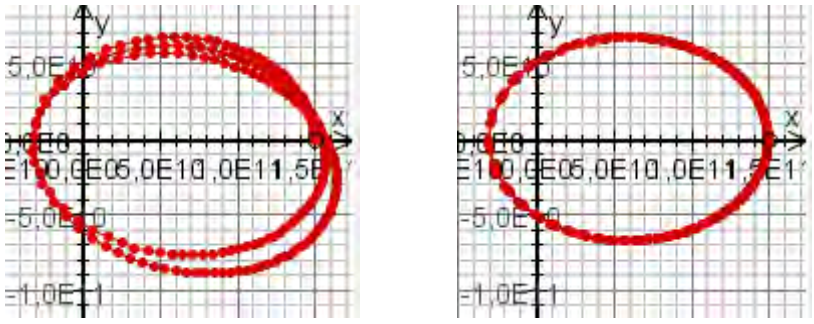


Abb. 3.2.3: Vergleich der berechneten Bewegung eines Körpers unter Einfluss der Gravitationskraft bei Verwendung eines Verfahrens ohne (links) und mit Schrittweitenanpassung (rechts).Ohne Fehlersteuerung verliert die Bahn zunehmend ihre Form.

4 Exemplarische Einsatzmöglichkeiten

Nachdem nun die Sinnhaftigkeit von Modellbildung und die Möglichkeiten von Newton-II ausgiebig erläutert wurden, widmet sich die restliche Arbeit der Aufgabe, diese Möglichkeiten anhand von einigen konkreten und schulnahen Beispielen zu demonstrieren. Zu diesem Zweck sind einige Arbeitsblätter entstanden, die im Anhang zusammen mit den zugehörigen Newton-II Projekten beigefügt sind und im Folgenden vorgestellt werden, wobei die diesbezüglichen Erläuterungen Einsatzanleitung, Lösungshinweis und didaktische Begründung in Einem sind. Daneben wird aber auch eine über das schulische Maß hinausgehende und beispielsweise als Seminararbeitsthema geeignete Modellierung des Stratosphärensprungs von Felix Baumgartner präsentiert, um auf die weiterführenden Einsatzmöglichkeiten der Software aufmerksam zu machen. Alles in allem liegt der inhaltliche Fokus der Beispiele aufgrund der eingangs angedeuteten Lehrplangegebenheiten aber weiterhin auf der zehnten Klasse.

4.1 Einführung in Newton-II - Freier Fall ohne Luftwiderstand

Zeitaufwand	1 Schulstunde / Hausaufgabe
Vorkenntnisse	(Methode der kleinen Schritte/Einführung in Numerik) Newtonsche Gesetze, insbesondere $F = m \cdot a$ Freier Fall, insbesondere $F_g = m \cdot g$ und $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
Ziel	Einführung in die Funktionen von Newton-II

Die Gewichtskraft taucht schon früh im Lehrplan auf und wird im weiteren Verlauf der Unter- und Mittelstufe immer wieder aufgegriffen. Auch in der zehnten Klasse spielt sie bei der Einführung der Newtonschen Gesetze wieder eine Rolle. Es ist also nicht allzu gewagt zu behaupten, dass es sich bei ihr – gerade in Anbetracht ihrer Auswirkungen auf das alltägliche Leben – um die bekannteste aller Kräfte handeln dürfte. Ihre direkte Wirkung, der freie Fall, kann von den Schülern spätestens seit der neunten Klasse auch analytisch beschrieben werden. Daher liegt es nahe, diesen zur Einführung in die Arbeit mit Newton-II zu verwenden, wodurch sich die Schüler angesichts ihrer Vorkenntnisse auf die Arbeit mit dem Programm konzentrieren können und nicht an physikalischen Schwierigkeiten scheitern sollten. Im Gegenteil sollten sie stattdessen in der Lage sein, ihr Wissen zu nutzen, um Bedienfehler festzustellen und ihre Ergebnisse zu verifizieren.

Das für diese Einführung entworfene Arbeitsblatt ist daher in Form eines Tutoriums gestaltet, also in Form eines erklärenden Fließtextes mit gelegentlichen Handlungsanweisungen, aber ohne eigene Schaffungshöhe, der allein die Bedienung des Programms vermitteln soll. Ein weiterer Grund für diese Vorgehensweise ist, dass die Schüler bei den späteren Aufgaben möglichst selbstständig mit der Software arbeiten und nicht durch häufige Bedienhinweise eingeengt werden sollen, die zusätzlich noch die Textlastigkeit der Aufgaben verstärkt hätten. Stattdessen sollen auf diese Weise Erklärungen zu allen benötigten Softwarefunktionen zusammen mit einer Art Bedienungsleitfaden kompakt zum späteren Nachlesen zur Verfügung stehen.
Bei allen genannten Vorzügen eines derartigen Tutoriums hat es jedoch einen gravierenden Nachteil, der durch die Bearbeitung dieses Arbeitsblattes in einer neunten Klasse auch bestätigt wurde: Nicht jeder Schüler ist gewillt einen Fließtext zu lesen, wenn er sich stattdessen auch an Bildern und den Handlungen seiner Nachbarn orientieren oder seinen Lehrer um Hilfe fragen kann. Um diesem, dem Erkenntnisgewinn nicht unbedingt zuträglichem Verhalten entgegenzuwirken, empfiehlt es sich daher, die Einführung in Heimarbeit und kurz vor der Bearbeitung der eigentlichen Aufgabenstellung durchführen zu lassen. Da die Schüler hier auf sich allein gestellt sind, sind sie bei Problemen genötigt, den Anweisungstext auch wirklich zu lesen. Gleichzeitig hat diese Vorgehensweise aber auch den Vorteil, dass jeder so viel Zeit aufwenden kann, wie er benötigt. Daher ist das Tutorium auch so ausführlich verfasst, dass bei vollständiger Lektüre keine Fragen auftreten sollten. Zudem existieren einige kurze Aufgaben, die zur Aufdeckung von Eingabefehlern gut geeignet sind, wodurch die Schüler ihren Lernerfolg selbstständig kontrollieren können. Auf diese Weise soll den bereits angesprochenen Problemen entgegengewirkt werden.
An fachlichen Kenntnissen sollten die Schüler aus den genannten Gründen auf jeden Fall tiefsitzendes Wissen über den freien Fall mitbringen. Dazu gehören insbesondere die Formel für die Gewichtskraft $F_g = m \cdot g$ und die Gleichung zur Beschreibung einer Bewegung mit konstanter Beschleunigung $s = 1/2 \cdot a \cdot t^2$.

4.2 Fall mit Luftwiderstand

Zeitaufwand	2-3 Schulstunden
Vorkenntnisse	Einführung in Newton-II Freier Fall, insbesondere $F_g = m \cdot g$ und $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ Lineare Kräfteaddition $F = F_1 + F_2$ Fall mit Luftwiderstand (rudimentär)
Utensilien	Wasserball oder Körper mit ähnlichem Fallverhalten Waage, Maßband, Maßstab (2m), Kamera, (Stativ)
Ziele	Untersuchung des Falls mit Luftwiderstand Herleitung einer Formel für die Grenzgeschwindigkeit

Es liegt nahe, im Anschluss an den freien Fall auch den Fall mit Luftwiderstand zu untersuchen, um die erlernten Arbeitsmethoden an einem anspruchsvolleren Beispiel anzuwenden, das sich mit Schulmathematik nicht mehr analytisch lösen lässt. Auch aus Sicht des Lehrplans ist die numerische Untersuchung einer weiteren eindimensionalen Bewegung neben der harmonischen Schwingung gewünscht. Aufgrund der Alltagsrelevanz von Luftwiderstand und dank vieler technischer Bedeutungen desselben, beispielsweise bei Fallschirmen oder beim Automobilbau, hat diese Themenauswahl auch einen nachvollziehbaren Alltagsbezug. Die hierfür entwickelte Aufgabenreihe sieht deshalb nicht nur vor, dass die Schüler zum ersten Mal selbstständig ein mathematisches Modell entwerfen und mit Newton-II auswerten, sondern auch, dass sie dieses mit einem per Videoanalyse ausgewerteten realen Experiment vergleichen, um das Modell zu verifizieren.
Dabei wird Tracker [16] verwendet, eine quelloffene Videoanalysesoftware, für die im Internet umfangreiche englischsprachige Anleitungen und Beispiele zur Verfügung gestellt werden. Für den Gebrauch im Verlaufe dieses Arbeitsblattes wurde jedoch eine kurze Schritt-für-Schritt Einweisung entworfen. Die vergleichsweise aufwendige Aufgabenstellung, die in dieser Form und mit dem benötigten Zeitaufwand vermutlich auch nicht immer komplett durchgeführt werden kann, soll auch als Beispiel dafür dienen, wie man es Schülern durch Kombination unterschiedlicher Methoden ermöglichen kann, einen ausführlichen physikalischen Erkenntnisgewinnungsprozess selbst zu erleben. Ziel der Aufgaben ist es, den Fall eines Körpers möglichst genau zu untersuchen. Dazu gehören die Bestimmung seines Strömungswiderstandskoeffizienten, der Vergleich der Bewegungsgraphen des

freien Falls mit dem des Falls mit Reibung, sowie daran anschließend die Herleitung einer Formel für die Grenzgeschwindigkeit.

Vorbereitungen und Videoanalyse

Die Schüler beginnen damit die Masse und die Querschnittsfläche des im Anschluss experimentell zu untersuchenden Körpers zu bestimmen. Dabei empfiehlt es sich, die Querschnittsfläche aus leichter zu messenden Parametern zu bestimmen, beispielsweise bei einer Kugel mithilfe des Umfangs aus $A = U^2/4\pi$. Als genaues Haushaltsmittel zur Wägung kann auch eine Briefwaage verwendet werden. Bei der Auswahl des Körpers müssen mehrere Faktoren bedacht werden. Am einfachsten herzustellen wäre ein aus Papier gebastelter Trichter, der zudem den Vorteil hat, dass er von der Videoanalysesoftware problemlos automatisch erkannt werden sollte. Auf der anderen Seite erreicht dieser beim Fall jedoch bereits innerhalb von sehr kurzer Zeit seine konstante Endgeschwindigkeit. Dieses Verhalten, das bei Freihandexperimenten durchaus erwünscht und von Vorteil ist, schmälert jedoch den Nutzen der Videoanalyse. Stattdessen sollte möglichst ein Körper gewählt werden, auf den der Luftwiderstand einen geringeren, aber dennoch gut messbaren Einfluss hat. Auf diese Weise kann das Newton-II Modell genutzt werden, um Vorhersagen zum weiteren Verlauf des Falls zu machen, was der reellen Nutzung von Simulationen in Wissenschaft und Technik entspricht.

Für die Aufgabenstellung im Arbeitsblatt und auch für die Probedurchführung wurde deshalb ein Wasserball benutzt. Dieser erfüllt die geforderten Eigenschaften, hat aber den gravierenden Nachteil, dass er aufgrund seiner Größe das automatische Tracking erschwert. Um es der Software nicht völlig unmöglich zu machen, muss daher ein einfarbiges Modell ohne Text- oder Werbeaufdruck verwendet werden. Sollte dies dennoch nicht zum Erfolg führen, so müssen die Schüler die Auswertung manuell vornehmen, indem sie die Oberseite und die Unterseite des Balls als zwei verschiedene Massepunkte getrennt tracken und anschließend den Mittelpunkt des Balls als Masseschwerpunkt bestimmen. Dieses Verfahren ist vergleichsweise zeitaufwendig, insbesondere dann, wenn die Schüler vorher noch nicht mit der Auswertungssoftware gearbeitet haben. Dazu kommen noch die Bedienfehler der Schüler, weswegen man bei der Durchführung die Videoanalyse auch nach spätestens einer Schulstunde beenden und eine vorher vorbereitete Datentabelle zur Verfügung stellen sollte. Zu diesem Zeitpunkt sollten die Schüler den grundsätzlichen Ablauf einer derartigen Auswertung verstanden haben, wodurch ein weiterer Zeitaufwand keinen wirklichen Mehrwert mehr brächte. Bei großem Zeitmangel oder fehlender Ausstattung kann diese

Auswertung notfalls natürlich auch von der Lehrkraft für die ganze Klasse vorgeführt werden, wenngleich dies nur dann wirklich sinnvoll ist, wenn die Klasse an anderer Stelle bereits mit Videoanalyse zu tun hatte und das Prozedere grundsätzlich kennt.
Bei der eigentlichen Versuchsdurchführung sollten die Hinweise auf dem Arbeitsblatt beachtetet, also eine geeignete Kamera genutzt, ein Zollstock im Bild positioniert und äußere Einflüsse wie Wind und mangelhafte Lichtverhältnisse bedacht werden. Aufgrund der breiten Verfügbarkeit von aufnahmefähigen Smartphones kann der Versuch prinzipiell sogar in Heimarbeit durchgeführt werden, was der inhaltlichen Reihenfolge des Arbeitsblatts entgegenkäme. Die hierbei entstehenden Resultate könnten im Anschluss daran – gleiche Bedingungen vorausgesetzt – verglichen und dadurch die Güte der Messung evaluiert werden. Diese Herangehensweise setzt jedoch eine gewisse Eigenständigkeit der Schüler voraus und ist insofern nicht immer möglich. Falls das Experiment nur einmal zentral für die Klasse durchgeführt wird, so empfiehlt es sich aus organisatorischen Gründen, die Aufnahme des Videos und die Analyse desselben der Bearbeitung des eigentlichen Aufgabenblattes voranzustellen. Alles in allem müssen für Videoaufnahme und Analyse etwa eineinhalb Schulstunden veranschlagt werden.

Modellierung in Newton-II

Sind all diese Vorarbeiten getroffen, beginnt die eigentliche Auswertung. Die Schüler sollen dazu zunächst den Fall des Balls in einem Newton-II Projekt modellieren, wofür sie zusätzlich zu den bereits für den freien Fall notwendigen Kenntnissen mit der linearen Addition von Kräften vertraut sein müssen. Ebenfalls sollten der Fall mit Luftwiderstand im Vorfeld zumindest angesprochen und die einflussnehmenden Größen mit kurzen Freihandexperimenten hergeleitet worden sein, um die Formel für die Reibungskraft plausibel zu machen.
Die wirkende Kraft setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft

$$F_g = m \cdot g \qquad (4.2.1)$$

m: Masse des Körpers

g: Ortsbeschleunigung

und einer geschwindigkeitsabhängigen Reibungskraft F_r. Aufgrund der beim Fall zu erwartenden turbulenten Strömungen lautet deren Gleichung [17, p. 232]

$$F_r = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \qquad (4.2.2)$$

ρ: Luftdichte

c_w: Strömungswiderstandskoeffizient

A: Querschnittsfläche des fallenden Körpers

v: Fallgeschwindkeit

Für die Gesamtkraft ergibt sich folglich

$$F = F_r - F_g \tag{4.2.3}$$

Die Aufgabenstellung und infolgedessen auch der erarbeitete Formelapparat sehen keine positive Anfangsgeschwindigkeit vor, um den Fokus auf den eigentlichen Lernzielen zu belassen. Falls dahingehend also weitere Untersuchungen durchgeführt werden sollen, muss die Kraftgleichung entsprechend angepasst werden:

$$F = F_r \cdot \frac{v}{|\mathrm{v}|} - F_g$$

Die Reibungskraft wurde derart genau aufgeschlüsselt und nicht durch $F_r = k \cdot v^2$ genähert, da sich aus dem Wissen über diese Abhängigkeiten in weiterführenden Aufgaben und Beispielen viele Erkenntnisse für alltägliche Situationen ziehen lassen. Die meisten dieser Abhängigkeiten sollten den Schülern aus dem Alltag ohnehin bewusst sein, weswegen eine Vereinfachung an dieser Stelle womöglich auch für Verwirrung sorgen könnte. Zudem sollen durch die vorherige Untersuchung des Wasserballs auch wissenschaftliche Arbeitsweisen anklingen, indem möglichst viele Parameter möglichst genau bestimmt werden, um dann experimentell Erkenntnisse über die fehlenden Größen gewinnen zu können. Die fehlende Größe ist in diesem Fall der Widerstandsbeiwert. Werden die aus der Videoanalyse gewonnen Daten in das Newton-II Projekt übertragen, können die Kurven durch Variation dieses Parameters zur Deckung gebracht werden, womit sich der Koeffizient bestimmen lässt. Dieser wird jedoch meist vom Literaturwert $c_w = 0{,}4$ [17, p. 233] einer starren Kugel abweichen, wodurch sich die Möglichkeit für die für physikalische Experimente immer notwendige und daher auch geforderte Fehlerdiskussion ergibt. So wurde bei einer Durchführung mit Schülern beispielsweise $c_w = 0{,}28$ ermittelt, was sicherlich unter anderem darauf zurückzuführen ist, dass Masse und Querschnittsfläche nicht absolut genau ermittelt wurden und der Wasserball zudem keine echte und starre Kugel, sondern vielmehr ein eher nachgiebiger kantiger Ellipsoid ist.

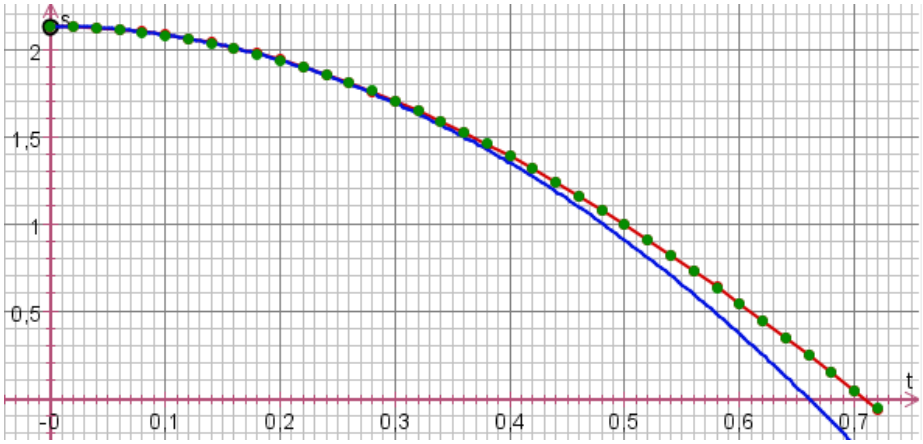


Abb. 4.2.1: Ortsdiagramm des Falls eines Wasserballs unter Berücksichtigung des Luftwiderstands. Abgebildet sind die Messwerte (grün), die Modellierung mit c_w = 0,28 (rot) und der Graph eines freien Falls ohne Luftwiderstand.[3]

Weiterführende Aufgaben

Im Anschluss daran folgt der Vergleich mit dem Fall ohne Luftwiderstand. Die hierfür notwendige Funktion

$$s(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h_0 \qquad (4.2.4)$$

h_0: Anfangshöhe

wird insbesondere auch in Anbetracht des Einführungstutoriums als bekannt vorausgesetzt. Vergleichen die Schüler die Zeit-Weg- und Zeit-Geschwindigkeit-Diagramme, so können sie erkennen, dass sich beim Fall mit Luftwiderstand nach einiger Zeit eine konstante Grenzgeschwindigkeit einstellt. Um diesen Effekt deutlicher sehen zu können, müssen die Schüler, wie bereits beschrieben, abermals die Möglichkeiten des Modellbildungssystems nutzen, indem sie die Fallhöhe des Balls vergrößern. Aus dieser Beobachtung sollen die Schüler folgern, dass sich ein Gleichgewicht zwischen Gewichts- und Reibungskraft einstellt, und damit eine allgemeine Formel für die Grenzgeschwindigkeit herleiten:

$$F_g = F_r$$

$$m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

$$v_{end} = \sqrt{\frac{2mg}{c_w \rho A}} \qquad (4.2.5)$$

[3] Sofern nicht anders angegeben, wurden sämtliche folgenden Darstellungen mithilfe von Newton-II erzeugt. Die Einheit der Zeitachse ist dabei immer Sekunden, Ortsangaben werden in Metern gemacht und Geschwindigkeiten in Metern pro Sekunde ausgedrückt. Auch die Farbgebung bleibt gleich.

Zum Ende des Arbeitsblatts hin sollen sich die Schüler noch Gedanken über die Grenzen ihres Modells machen. Konkret geht es dabei darum, diejenigen Aspekte zu diskutieren, die diesem zur Beschreibung eines echten Fallschirmsprungs fehlen, wobei beispielsweise die mangelnde Berücksichtigung von variabler Luftdichte, Böen, Thermik und Körperform genannt werden könnten. Derartige Gedanken genügen nicht nur den im zweiten Kapitel diesbezüglich aufgestellten Forderungen, sondern können auch im Unterrichtsgespräch wieder aufgegriffen werden, um beispielsweise zur Diskussion des im folgenden Kapitel vorgestellten Stratos-Sprungs überzuleiten. Sollte es Schüler geben, die hiernach noch immer vor der Zeit fertig sind, so können diese versuchen, eine Fallschirmöffnung mithilfe einer bedingten Variablen zu simulieren, was hauptsächlich als Zeitpuffer dienen soll, aber die Schüler womöglich auch zu weiterführenden Überlegungen veranlassen kann.

Herleitung der analytischen Lösung

Zum Abschluss sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass sich die Bewegungsgleichung des Falls mit Luftwiderstand durchaus auch analytisch lösen lässt, wenngleich die resultierende Funktion selten eine Rolle spielt. Die komplette Gleichung lautet:

$$m\ddot{x} = k\dot{x}^2 - mg \qquad (4.2.6)$$

$$\text{mit } k = \frac{1}{2} c_w \rho A$$

Diese Differentialgleichung ist durch Trennung der Variablen lösbar, sodass sich mithilfe der Umformungen

$$\dot{v} = \frac{k}{m} v^2 - g$$

$$\frac{dv}{\frac{k}{m} v^2 - g} = dt$$

und unter Einsatz einer Integraltabelle die beiden folgenden Lösungen ergeben:

$$v(t) = -v_{end} \cdot \tanh\left(\frac{gt}{v_{end}} - \operatorname{arctanh}\left(\frac{v_0}{v_{end}}\right)\right) \qquad (4.2.7)$$

$$x(t) = -\frac{v_{end}^2}{g} \cdot \ln\left(\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_{end}^2}} \cdot \cosh\left(\frac{gt}{v_{end}} - \operatorname{arctanh}\left(\frac{v_0}{v_{end}}\right)\right)\right) \qquad (4.2.8)$$

4.3 Red Bull Stratos

Das Thema Luftwiderstand ist mit dem soeben vorgestellten Beispiel keineswegs vollumfänglich behandelt. Um den Schülern ein Gefühl dafür zu geben, wie viele, teils unerwartete Parameter in der Realität und somit auch für ein umfassendes Modell relevant sind, sollten zuweilen Beispiele vorgestellt werden, die zwar an Schulwissen anknüpfen, schlussendlich aber doch darüber hinausgehen. Eine Möglichkeit dafür ist die Behandlung des von Felix Baumgartner durchgeführten Stratosphärensprungs, der sich insbesondere auch aufgrund seiner Bekanntheit und wegen des verfügbaren Videomaterials anbietet. Im Folgenden wird daher zunächst ein zum Verlauf des Falls passendes Newton-II Modell erstellt und anschließend kurz sein Einsatz in der Schule diskutiert. Die Besonderheit dieses Ansatzes ist dabei die Einfachheit der angewandten Mittel. So sind weder grobe Näherungen zum Erzwingen von analytischen Lösungen notwendig, noch werden über die Möglichkeiten von Newton-II hinausgehende technische Hilfsmittel dringend benötigt. Die Vorgehensweise bleibt damit im Grunde für Schüler verständlich, wobei selbstverständlich an einigen Stellen Informationen abseits von Schulwissen vonnöten sind.

4.3.1 Allgemeine Informationen

Im Zuge des Red Bull Stratos-Projektes führte der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner am 14. Oktober 2012 einen Fallschirmsprung aus 38 969 Metern Höhe durch. Diese enorme Höhe machte nicht nur den Einsatz eines speziellen Druckanzugs und die Kooperation mit US Air Force und NASA notwendig, sondern veranlasste die Veranstalter auch zum Einsatz einer ballongestützten Absprungplattform. Die vom Sponsor Red Bull groß inszenierte Veranstaltung erzeugte damals ein enormes Medienecho, das bis heute nachwirkt. So brach Baumgartner nach 260 Sekunden freien Falls mit einer Spitzengeschwindigkeit von 1357 km/h nicht nur mehrere Weltrekorde, sondern lieferte auch den beteiligten Wissenschaftlern wertvolle Daten. [18] Auf diese Weise konnten beispielsweise die Reaktionen des menschlichen Körpers auf eine derartige Belastung ausführlich untersucht werden. Aus physikalischer Sicht wichtiger ist jedoch die Tatsache, dass es in der Nähe der Schallmauer nur zu einer im Vergleich zur ursprünglichen Kalkulation sehr geringen Vergrößerung des Luftwiderstands kam. Diese Beobachtung ist nicht nur darauf zurückzuführen, dass sich Baumgartner aufgrund seines vorherigen Trainings nicht wie der bei der Modellrechnung angenommene rotierende Würfel verhielt [19, p. 11], sondern lässt außerdem Rückschlüsse auf die besonderen Eigenschaften von unregelmäßig geformten

Körpern zu – Erkenntnisse die selbst jetzt noch zu aktuellen Veröffentlichungen führen und auch in der zukünftigen Luftfahrtforschung noch eine Rolle spielen könnten.

4.3.2 Modellierung in Newton-II

Baumgartners Sprung wurde in einem für die Öffentlichkeit zugänglichen YouTube-Video dokumentiert [20], aus dem die im Folgenden verwendeten Daten über Höhe und Geschwindigkeit mittels Bilderkennung ausgelesen und anschließend händisch korrigiert wurden. Zusätzlich ist bekannt, dass der Sprung auf 38 969 m Höhe begann und bei 33,3° nördlicher und 104,5° westlicher Breite in der Nähe des Roswell Air Centers in New Mexico stattfand. [21] Dank der Arbeiten von Guerster und Walter kann in die folgenden Überlegungen auch Baumgartners genaue Gesamtmasse von 121,2 kg einfließen. Des Weiteren haben sie durch den Vergleich von Bildern des Anzugs mit sich im Bild befindlichen Referenzgrößen die effektiven Querschnittsflächen ermittelt: [19, p. 7]

$A_{x\,(\text{frontal})} = 1{,}19\ \text{m}^2$ $A_{y\,(\text{sagittal})} = 0{,}804\ \text{m}^2$ $A_{z\,(\text{transversal})} = 0{,}525\ \text{m}^2$

Weitere Daten sind mit Ausnahme von Höhe und Geschwindigkeit nicht frei verfügbar und werden deshalb auch nicht verwendet. Außerdem wird nur der Flugabschnitt vor der Fallschirmöffnung untersucht, da die daran anschließenden Messwerte eine gänzlich andere Größenordnung als die vorherigen haben, weshalb einem gemeinsamen Diagramm schwer aufzulösen sind. Zudem stand der Simulation der Fallschirmöffnung zum Zeitpunkt des Erstellens dieser Arbeit ein neu entdeckter aber für gewöhnlich eher vernachlässigbarer und sehr spezieller Softwarefehler in Newton-II im Weg.

Ein erster Ansatz

Grundsätzlich entsprechen die wirkenden Kräfte dem bereits behandelten Fall mit Luftwiderstand. Beginnt man jedoch mit ähnlichen Einstellungen und setzt nur Baumgärtners Masse $m = 121{,}2\ \text{kg}$ sowie einen realistischen Wert für den Körperquerschnitt $A = 1{,}2\ \text{m}^2$ ein, so wird schnell deutlich, dass hier zusätzliche Überlegungen notwendig sind. Der Strömungswiderstandsbeiwert wurde vorerst konstant auf $C_w = 0{,}65$ gesetzt, was besagtem rotierenden Würfel entspricht. [22, pp. 16-14] [23, p. 83] Zusätzlich wird in der Berechnung die von Baumgartners Instrumenten angezeigte Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = -1{,}944\ \text{m/s}$ berücksichtigt.

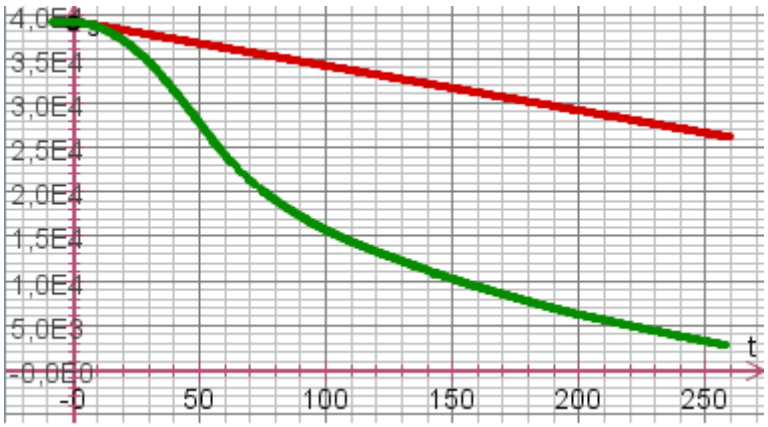


Abb. 4.3.1: Ortsdiagramm von Baumgartners Fall (grün) mit einer einfachen Simulation (rot).

Anpassung der Luftdichte

Es ist nachvollziehbar, dass in knapp 40 km Höhe nicht die Dichte von 20 °C warmer Luft auf Meeresniveau angenommen werden kann. Da das Datenvideo jedoch keinerlei Informationen über Temperatur, Luftdruck, Luftdichte oder gar Luftfeuchtigkeit enthält, muss an dieser Stelle mit Durchschnittswerten nachgeholfen werden. Für diesen Zweck wird im Folgenden das Modell der US-Standardatmosphäre von 1976 [24, pp. 1-20] herangezogen, das auf denselben Annahmen wie die neuere und bis heute für die Luftfahrt gültige ICAO-Atmosphäre [25] aufbaut, aber in dem für Baumgartners Sprung relevanten Höhenbereich eine genauere Aufgliederung vornimmt. Das Modell unterteilt die Atmosphäre in mehrere Schichten, in denen jeweils ein linearer Temperaturverlauf angenommen wird:

$$T(h) = T_b + L_b \cdot (h - h_b) \qquad (4.3.1)$$

h: Geopotentielle Höhe

h_b: Geopotentielle Basishöhe der Schicht b

T_b: Basistemperatur der Schicht b

L_b: Lapse Rate der Schicht b

Der atmosphärische Temperaturgradient oder auch *Lapse Rate* ist eine schichtabhängige Konstante, die auf Grundlage langfristiger Messungen ermittelt wurde. Zusammen mit den in Tabelle 4.3.1 definierten Basiswerten lässt sich damit der Temperaturverlauf der gesamten Atmosphäre bestimmen. Rechnet man mit der geopotentiellen Höhe, so geht man immer von einer konstanten Fallbeschleunigung $g_0' = 9{,}80665 \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2 \cdot m'}}$ aus. Dies wird im nächsten Kapitel auch noch etwas genauer erläutert.

Tabelle 4.3.1: Schichten der US-Standardatmosphäre von 1976 (auf Basis von [24, p. 3])

b	Atmosphä-renschicht	Geopotentielle Basishöhe h_b in m	Basisdruck p_b in Pa	Basistemperatur T_b in K	Lapse Rate L_b in K/m
0	Troposphäre	0	101 325	288,15	-0,0065
1	Tropopause	11 000	22 632,1	216,65	+0,0
2	Stratosphäre	20 000	5 474,89	216,65	+0,001
3	Stratosphäre	32 000	868,019	228,65	+0,0028
4	Stratopause	47 000	110,906	270,65	0,0

Die zweite dem Modell zugrunde liegende Annahme ist, dass die Atmosphäre nur aus trockener Luft besteht und sich zudem jederzeit im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, was unter der Annahme, dass für den Stratosphärensprung ein möglichst wolkenloser Tag in New Mexico gewählt wurde, auch einigermaßen gerechtfertigt ist.
Für die weiteren Berechnungen setzt man zunächst den Schweredruck an:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot h$$

ρ: Luftdichte

g: Fallbeschleunigung

h: Höhe

Anschließend kombiniert man ihn mit der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase

$$p = \rho \cdot R_s \cdot T$$

woraus sich die folgende Differentialgleichung ergibt:

$$\frac{dp}{p} = \frac{-g(h)}{R_s \cdot T(h)} dh$$

In leichter Variation zur Herleitung im offiziellen Modell wird hier statt der allgemeinen Gaskonstante direkt die spezifische $R_s = 287{,}053\ \mathrm{J/(kg \cdot K)}$ von trockener Luft angesetzt, da die Luftzusammensetzung und somit auch ihre molekulare Masse im Sprungbereich konstant bleibt [24, p. 15]. Da im Modell die geopotentielle Höhe verwendet wird, vereinfacht sich die Gleichung noch ein wenig weiter:

$$\frac{dp}{p} = \frac{-g_0{}'}{R_s \cdot T(h)} dh$$

Setzt man Gleichung (4.3.1) in diese ein und integriert anschließend, so ergeben sich für den Druck die beiden Funktionsgleichungen

$$p(h) = p_b \cdot \left(\frac{T}{T_b}\right)^{-\frac{g_0'}{R_s \cdot L_b}} \qquad (4.3.2)$$

für Schichten mit $L_b \neq 0$ und

$$p(h) = p_b \cdot \exp\left[\frac{-g_0' \cdot (h - h_b)}{R_s \cdot T_b}\right] \qquad (4.3.3)$$

für Schichten mit $L_b = 0$. Um daraus schlussendlich die gesuchte Luftdichte abzuleiten, muss noch einmal das ideale Gasgesetz angewandt werden:

$$\rho(h) = \frac{p(h)}{R_s \cdot T(h)} \qquad (4.3.4)$$

Damit kann das Modell vollständig in Newton-II implementiert werden, wozu jedoch leider bedingte Variablen notwendig sind. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die hierfür benötigten Eingaben noch einmal in Tabelle 4.3.2 zusammengefasst.

Tabelle 4.3.2:Für die Implementierung der US-Standardatmosphäre in Newton-II notwendige bedingte Variablen

Definition	Wenn	Dann	Sonst
T	h<11000	288,15-0,0065·h	T1
T1	h<20000	216.65	T2
T2	h<32000	216.65+0,001·(h-20000)	T3
T3	228.65+0,0028·(h-32000)		
p	h<11000	101325·(T/288)^(g_oh/(0,0065·Rs))	p1
p1	h<20000	22632·exp(-g_oh·(h-11000)/(Rs·216,65))	p2
p2	h<32000	5474,89·(T/216,65)^(-g_oh/(0,001·Rs))	p3
p3	868,02·(T/228,65)^(-g_0h/(0,0028·Rs))		
ρ	p/(Rs·T)		

Nach diesen Anpassungen entspricht die Simulation nun schon eher dem tatsächlichen Verlauf von Baumgartners Fall. Die geopotentielle Höhe h wird hierzu vorläufig gleich der geometrischen Höhe s gesetzt, was jedoch eine akzeptable Näherung ist, wie der nächste Abschnitt zeigen wird.

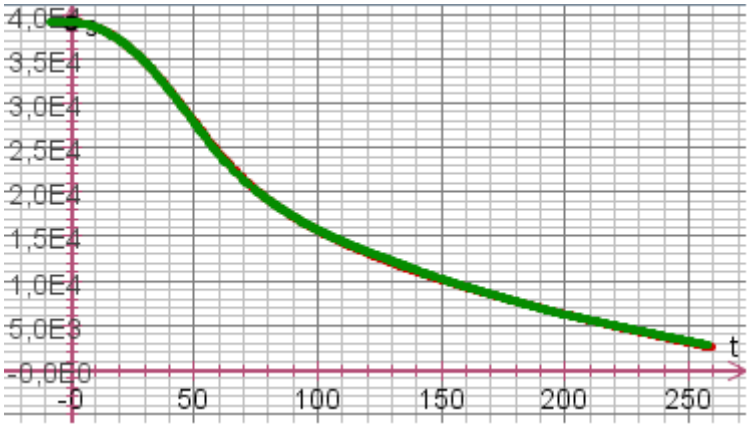


Abb. 4.3.2: Ortsdiagramm des Stratos-Sprungs mit angepasster Luftdichte

Korrektur der geopotentiellen Höhe

Wie bereits erwähnt, verwendet die geopotentielle Höhe ein System mit konstanter Erdbeschleunigung, was sich folglich auch in ihrer Definition widerspiegelt: Die geopotentielle Höhe h ist diejenige Strecke, die eine Probemasse m bei gleichbleibendem Ortsfaktor g_0' rechnerisch überwinden müsste, um dieselbe potentielle Energie aufzunehmen wie beim Erreichen der geometrischen Höhe s im höhenabhängigen Schwerefeld $g(s)$. [24, pp. 7-8] Es gilt also

$$\int_0^h m \cdot g(s)ds = mg_0' \cdot h$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^h g(s)ds = g_0' \cdot h \qquad (4.3.5)$$

Der Ortsfaktor an einem bestimmten Punkt auf der Erdoberfläche ist bekanntermaßen über die Gravitationskraft definiert, wobei R_E vom Breitengrad φ abhängig ist.

$$g_0(\varphi) = G \cdot \frac{M}{R_E(\varphi)^2}$$

G: Gravitationskonstante

M: Erdmasse

R_E: Erdradius

Abermals mithilfe des Gravitationsgesetzes lässt sich damit eine breitengradabhängige Formel für die Erdbeschleunigung bei variabler geometrischer Höhe herleiten.

$$g_\varphi(s) = G \cdot \frac{M}{(R_E + s)^2}$$

$$= g_{0,\varphi} \cdot \left(\frac{R_E}{R_E + s}\right)^2 \qquad (4.3.6)$$

Diese muss man noch in Gleichung (4.3.5) einsetzen und das Integral auflösen, um die gesuchte Umrechnungsfunktion zwischen geometrischer und geopotentieller Höhe zu erhalten.

$$h_\varphi(s) = \frac{g_{0,\varphi}}{g_0{}'} \cdot \frac{R_E \cdot s}{R_E + s} \qquad (4.3.7)$$

Um es mit der Genauigkeit auf die Spitze zu treiben, werden nun noch die Erdbeschleunigung auf Meeresniveau g_0 und der Erdumfang R_E an den Breitengrad der Absprungposition angepasst. Dies geschieht auf Grundlage des WGS 84-Ellipsoiden [26] mit Äquatorradius $a = 6378137$ m und Polradius $b = 6356752$ m. Hierzu verwendet man die für Ellipsen allgemein gültige und mit einfachen trigonometrischen Methoden herleitbare Formel

$$R_E = \sqrt{\frac{(a^2 \cos\varphi)^2 + (b^2 \sin\varphi)^2}{(a\cos\varphi)^2 + (b\sin\varphi)^2}}$$

wodurch sich mit $\varphi = 33{,}3°$ der folgende lokale Erdradius ergibt:

$$R_E = 6\,371\,729 \text{ m} \qquad (4.3.8)$$

Zur Korrektur des Ortsfaktors verwendet man dagegen die numerisch berechnete WGS 84 Gravitationsformel: [27]

$$g_0 = 9{,}780327 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{1 + 0{,}001931851 \cdot \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - 0{,}006694380 \cdot \sin^2\varphi}}$$

$$g_0 = 9{,}8006 \text{ m/s}^2 \qquad (4.3.9)$$

Wie sich beim Anpassen des Newton-II Projekts zeigt, haben all diese Korrekturen nur einen sehr geringen und vernachlässigbaren Einfluss auf die Modellrechnung. Nichtsdestotrotz sollten sie in dieser Arbeit vorgestellt werden, um das eingesetzte Atmosphärenmodell möglichst vollständig zu erläutern.

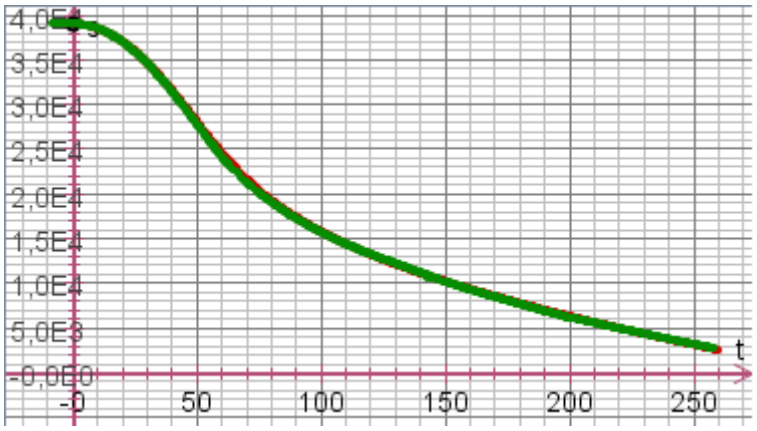


Abb. 4.3.3: Ortsdiagramm des Stratos-Sprungs mit Umrechnung zwischen geometrischer und geopotentieller Höhe

Variable Querschnittsfläche

Einen deutlich stärkeren Einfluss auf den Verlauf des berechneten Falls hat dagegen die effektive Querschnittsfläche. Denn auch wenn man unter Annahme, dass diese konstant bleibt, bereits eine relativ gute Übereinstimmung der Kurven erzielen kann, so entspricht dies doch keineswegs der Wirklichkeit, wie spätestens ein Blick in das folgende Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm zeigt.

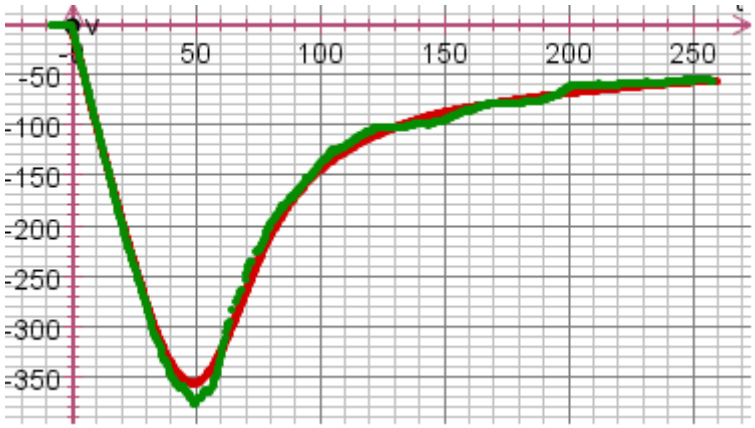


Abb. 4.3.4: Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm des modellierten (rot) und berechneten Stratos-Sprungs (grün)

Tatsächlich ändert sich die effektive Querschnittsfläche während es Falls immer wieder. Wie sowohl dem Video des Falls, als auch dem offiziellen Endbericht zu entnehmen ist [18, p. 28], lässt sich Baumgartners Fall in mehrere Phasen unterteilen: In den ersten 30 Sekunden fällt er bei geringer Reibung mit dem Kopf voraus. Daran schließt eine langsame Rotation an, die Baumgartner zwar nach ca. 40 bis 45 Sekunden wieder unter Kontrolle bringt, sich daraufhin aber in eine flachere Position verdreht. Beim Versuch dies zu korrigieren, dreht sich Baumgartner auf den Rücken, wodurch sich die Reibung erheblich erhöht. Daran schließt sich eine schnelle Rotationsbewegung an und erst nach 80 Sekunden freien Falls wieder endet, woraufhin Baumgartner den Fall in stabiler Fallschirmspringerpose fortführen kann. Für die Querschnittsfläche bedeutet dies, dass es grob gesehen zwei Werte gibt: Der Fall mit dem Kopf voran und der Fall auf dem Rücken bzw. Bauch.

Tabelle 4.3.3: Effektive Querschnittfläche nach Guerster und Walter ***[19, p. 7]***

t in s	A in m^2
25	0,89
36	0,91
48	0,94
54	1,0
60	1,25
66	1,30
72	1,25
77	1,30
83	1,25
95	1,25
130	1,35

Um dies genauer zu untersuchen, kann man versuchen, die Winkel α und β der Verdrehung Baumgartners um seine y- bzw. z-Achse mithilfe der online zur Verfügung stehenden Videos abzuschätzen. Die Querschnittsfläche ergibt sich dann aus

$$A = \left(A_x \cos\beta + A_y \sin\beta\right)\cos\alpha + A_z \sin\alpha$$

Dies ist der Weg, den Guerster und Walter in ihrer Untersuchung gegangen sind, wobei sie sich auf den Winkel α beschränkten. Um das Rad an dieser Stelle nicht neu zu erfinden, werden ihre Ergebnisse deshalb für die weiteren Berechnungen mit leichten Modifizierungen zugrunde gelegt. Die in Tabelle 4.3.3 in Abhängigkeit von der Falldauer aufgetragenen Daten können mithilfe einer Tabellenfunktion in Newton-II implementiert werden. Daraus resultierend sind die Graphen des modellierten und des reellen Falls schon nahezu zur Deckung gebracht.

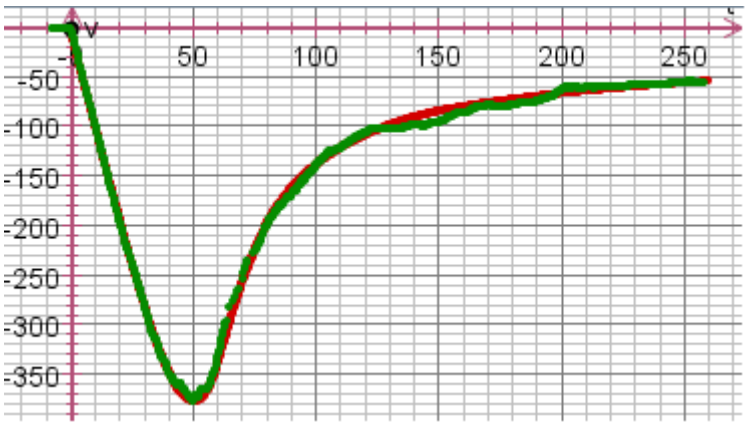


Abb. 4.3.5: Geschwindigkeitsdiagramm des Stratos-Sprungs mit variabler Querschnittsfläche

Transsonische Geschwindigkeit

Betrachtet man dieses Diagramm ein wenig näher, so stellt man fest, dass im Bereich der Maximalgeschwindigkeit noch immer deutliche Abweichungen auftreten. Dies lässt sich mit einem eingangs bereits angedeuteten Phänomen erklären: Ab einer gewissen Geschwindigkeit steigt der Strömungswiderstandskoeffizient von umströmten Körpern rapide an, was darauf zurückzuführen ist, dass noch vor Erreichen der Schallgeschwindigkeit lokale Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit entstehen können, wodurch die Luft lokal verdichtet wird. [28, pp. 612-615] Die Geschwindigkeit, ab der dieser Effekt auftritt, wird über ihre Machzahl definiert, die *drag divergence number*. Sie liegt typischerweise im Bereich von 0,6 bis 0,8. Der Widerstandswert steigt in dieser Phase bis zu seinem Maximalwert und fällt anschließend wieder ab.

An dieser Stelle soll abermals der Ansatz von Guerster und Walter verfolgt werden, die zur Bestimmung des Koeffizienten die Messungen von Hansche und Rinehart [23, p. 83] und die darauf aufbauenden Überlegungen von Hoerner [22, pp. 16-14] zugrunde legen. Danach liegt die *drag divergernce number* für einen rotierenden Würfel bei $Ma = 0{,}6$ und steht am Beginn einer Steigerung des Widerstandswerts proportional zu $(Ma - 0{,}6)^2$, die ab $Ma = 1{,}1$ in eine lineare Abnahme proportional zu $(Ma - 1{,}1)$ übergeht. Ma steht dabei für die Machzahl

$$Ma = \frac{v}{v_s} \tag{4.3.10}$$

mit Schallgeschwindigkeit v_s. Um dieses Modell zu übernehmen, muss die lokale Schallgeschwindigkeit aus den vorhandenen Wetterdaten bestimmt werden. Dazu wird die Luft erneut als ideales Gas angenommen, womit sich

$$v_s = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \tag{4.3.11}$$

mit Adiabatenexpoent $\kappa = 1{,}40$ ergibt. [28, p. 474] Auf der Grundlage der obigen Annahme, kann man die folgenden drei Gleichungen ansetzen:

$$c_1 = X \qquad \text{für } Ma \leq 0{,}6$$
$$c_2 = X + Y \cdot (Ma - 0{,}6)^2 \qquad \text{für } 0{,}6 \leq Ma \leq 1{,}1$$
$$c_3 = X + Y \cdot 0{,}25 - Z \cdot (Ma - 1{,}1) \qquad \text{für } 1{,}1 \leq Ma$$

Zur Eingabe der Konstanten X, Y und Z werden anschließend in Newton-II Schieberegler benutzt und zum Wechsel der c_w-Werte zwei bedingte Variablen. Mithilfe dieser Schiebregler lässt sich nun nach Augenmaß die finale Anpassung des Modells an die Messwerte durchführen. Unter Verwendung der folgenden Werte lässt dabei eine bemerkenswerte Übereinstimmung erreichen.

$$X = 0{,}61$$
$$Y = 0{,}54$$
$$Z = 0{,}54$$

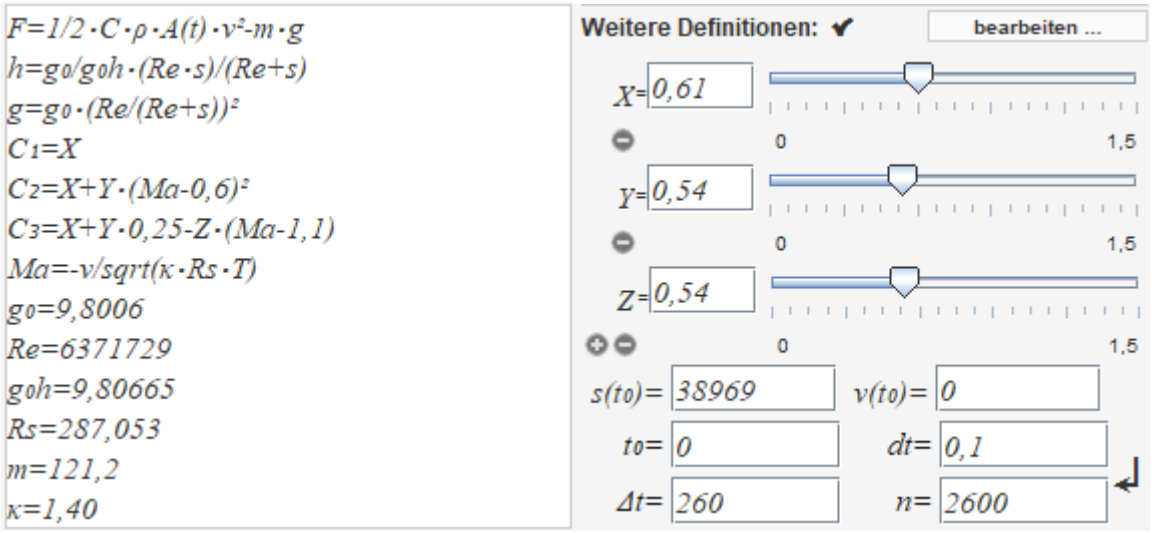


Abb. 4.3.6: Finale Einstellungen im Newton-II Projekt

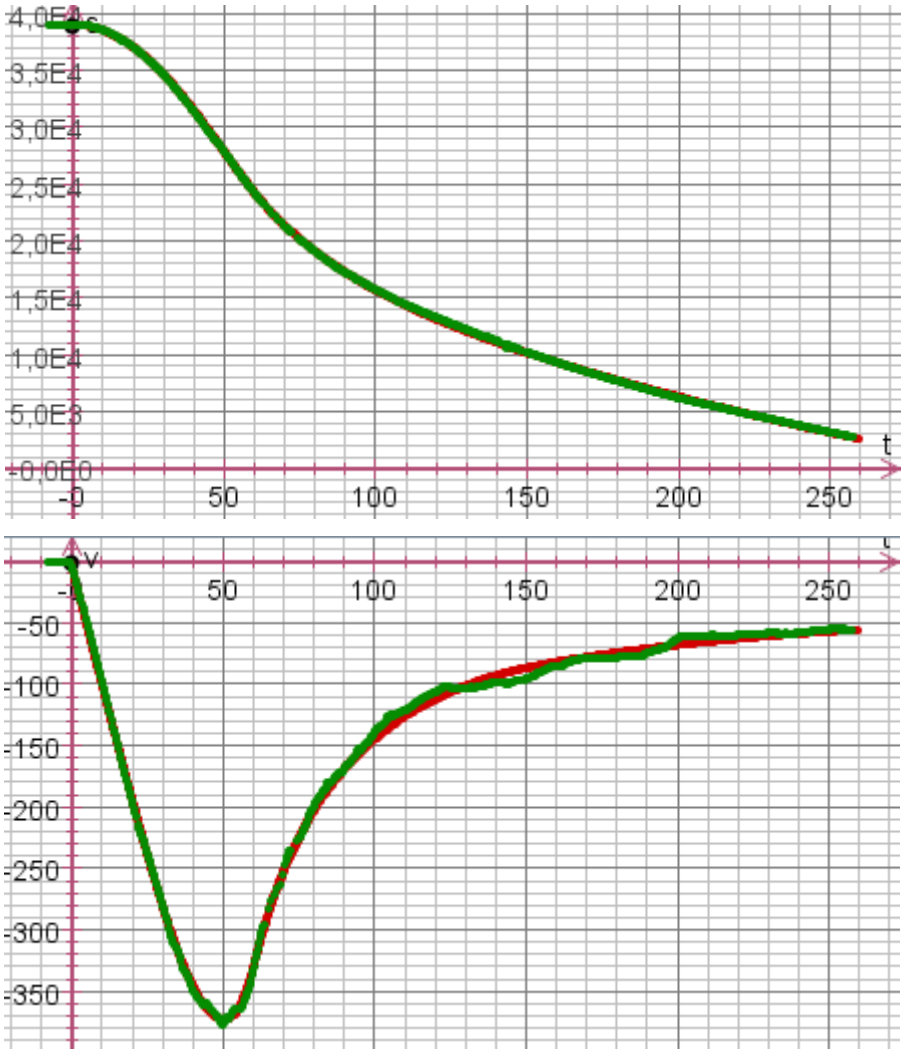


Abb. 4.3.7: Zeit-Weg- und Zeit-Geschwindigkeit-Diagramme der finalen Version des modellierten Stratos-Sprungs

Betrachtung der Ergebnisgüte

In diesem Kapitel konnte dargestellt werden, dass man mithilfe von Newton-II auf einigermaßen verständliche Weise auch ein komplexes und in der Wissenschaft noch untersuchtes Thema wie den Stratosphärensprung von Felix Baumgartner modellieren kann. Eine physikalisch vollständige Untersuchung des Falls war also nicht das Ziel und wäre mit Newton-II auch nicht sinnvoll, weswegen im zurückliegenden Abschnitt auf Fehlerrechnung jeglicher Art verzichtet wurde. Nichtsdestotrotz kann man die Genauigkeit der für die Modellierung verwendeten Werte kritisch diskutieren.

Mit den eingegebenen Daten lässt sich ein Modellgraph erzeugen, der an jedem Punkt maximal 200m Abweichung von der tatsächlichen Kurve aufweist. In Anbetracht der Tatsache, dass keinerlei Wetterdaten und insbesondere keine wirklich verlässlichen Daten über die effektive Querschnittsfläche vorliegen, ist das ein beachtliches Ergebnis. Es ist folglich klar, dass nicht jede Komponente zuverlässig bestimmt werden kann. So gehen, wie auch beim vorherigen Experiment, Luftdichte, Querschnittfläche und der Strömungswiderstandsbeiwert alle linear in die wirkende Kraft mit ein, weswegen sich ihre Fehler auch gleichartig auf das Ergebnis auswirken. Die Luftdichte dürfte dabei vermutlich das geringste Problem sein, obwohl hier Normwerte angesetzt wurden, die den damaligen Witterungsbedingungen nicht exakt entsprechen. Der Einfluss der Querschnittsfläche ist dagegen schon größer, da diese nur grob abgeschätzt wurde und lokale Änderungen mit starkem Einfluss auf das Krümmungsverhalten der Graphen verursacht. Gut zu erkennen sind auch die Differenzen zwischen den Geschwindigkeitsverläufen, da die Messwerte hier starken Schwankungen unterliegen. Diese sind jedoch vermutlich auf Böen und Turbulenzen zurückzuführen, die in diesem Modell selbstverständlich nicht berücksichtigt werden können. Über etwaige Ungenauigkeiten in den von Red Bull verwendeten Messapparaturen existieren ebenfalls keinerlei Daten. Entsprechend limitiert ist also auch die Genauigkeit des zuletzt durch optische Anpassung bestimmten Widerstandsbeiwerts.

Guerster und Walter haben für ihre mittels computergestützter Methoden bestimmten Konstanten unter Berücksichtigung all dieser Mängel die folgenden Fehler berechnet:
(siehe [19, p. 14])

$$X = 0{,}60 \pm 0{,}05$$
$$Y = 0{,}55 \pm 0{,}11$$
$$Z = 0{,}32 \pm 0{,}28$$

Da bei der in Newton-II verwendeten optischen Anpassung die Konstanten Y und Z aufgrund ihres geringen Einflusses auf den Verlauf des Graphen nur vergleichsweise ungenau bestimmt werden konnten, sollte man den Fehler hier etwa doppelt so groß ansetzen. Ansonsten zeigt sich jedoch, dass die händisch und mit vergleichsweise geringem Aufwand durchgeführte Anpassung nahezu perfekt mit dem rechnerischen Ergebnis übereinstimmt.
All diese Ungenauigkeiten spielen jedoch nur eine Rolle, wenn man aus dem Modellergebnis Schlüsse über die wirklichen Widerstandsbeiwerte ziehen möchte, was für den im folgenden diskutierten Schuleinsatz keine Rolle spielt.

4.3.3 Einsatz im Schulunterricht

Um nach diesem umfangreichen mathematischen Exkurs zum konkreten Schuleinsatz zurückzukehren, gilt es nun, Einsatzmöglichkeiten für ein derart umfangreiches Modell im Unterricht zu finden, denn es scheint klar zu sein, dass man dieses Thema nicht mit einem einfachen Arbeitsblatt abhandeln kann. Was aber gut möglich ist und für die Schüler dennoch einen Gewinn darstellt, ist die alleinige Präsentation des Modells. Zum einen ist es natürlich lehrreich, mit einer Klasse über all die vorgestellten Schwierigkeiten und Lösungsansätze bei der Untersuchung dieses Problems zu sprechen, um darzustellen, wie kompliziert die Modellierung eines recht einfach scheinenden Vorgangs aus der Realität werden kann. Auf der anderen Seite ist diese Tatsache wohl genau das, was viele Schüler schon immer gewusst zu haben glauben, weswegen sie den Physikunterricht als unnötigen und unrealistischen Ballast empfinden. Für sie wiederum kann es eine wichtige Erkenntnis sein, zu sehen, wie weit sie es mit ihren Schulkenntnissen und ein wenig Recherche bringen können: Sie kennen die Gewichtskraft, sie kennen die Reibungskraft und mit Newton-II haben sie bereits selbst gearbeitet. Auch die benötigten Daten könnten sie einfach mit Stift und Papier aus einem YouTube Video entnehmen. Es fehlen also – leicht überspitzt formuliert – einzig ein paar weiterführende Informationen zur Luftdichte, die man im Prinzip leicht recherchieren könnte.
Neben dieser Herangehensweise bietet es sich aber natürlich auch an, einfach nur anhand eines konkreten Ereignisses die Medienkompetenz der Schüler zu entwickeln und sie den Verlauf der Kurven diskutieren zu lassen. Dabei ist es jedoch vorteilhaft, wenn die Fallschirmöffnung im Graphen ebenfalls sichtbar ist, weswegen hierfür beispielsweise auch die im offiziellen Video gezeigten Graphen verwendet werden könnten.

Ihr volles Potential kann diese Aufgabe aber wohl nur als Seminararbeitsthema ausspielen, auch wenn es Bestrebungen gibt, den Formelapparat in vereinfachter Form komplett für Schüler zugänglich zu machen. [29] Doch allein eine ausführliche Erklärung des Modells der US-Standardatmosphäre böte schon ausreichend Raum für genauere Untersuchungen, vom Strömungswiderstand und den Effekten an der Schallmauer ganz abgesehen. Das Kapitel wurde deshalb auch derart gestaltet, dass in alle für solche Arbeiten notwendigen Themengebiete ein Einblick gegeben und diese auch großzügig mit Verweisen auf weiterführende Literatur versehen wurden.

4.4 Harmonische Federschwingung

Ein weiteres Thema, das sich für die Erschließung mithilfe numerischer Lösungsverfahren derart anbietet, dass diese Bearbeitungsweise vom bayerischen Lehrplan sogar verpflichtend vorgesehen ist, ist die harmonische Schwingung. Es lag also nahe, auch hierfür ein Arbeitsblatt zu entwerfen, doch was anfangs wie ein sinnvoller Schritt erschien, erwies sich später als suboptimale Lösung.

Der Hauptgrund dafür ist die Tatsache, dass die Lernvoraussetzungen der Schüler je nach Zeitpunkt der Einführung und sonstiger Unterrichtsorganisation sehr unterschiedlich sein können. So ist es beispielsweise entscheidend, ob die allgemeine Sinusfunktion bereits im Mathematikunterricht durchgenommen wurde oder diese zusätzlich hergeleitet werden muss. Gleichzeitig sind Schwingungen ein Thema, das sich – ein ausreichend großes Zeitfenster vorausgesetzt – für eine hauptsächlich experimentelle Einführung anbietet, die nur punktuell durch den manuellen Einsatz der Methode der kleinen Schritte oder die Verwendung von auf die jeweiligen Anforderungen zugeschnittenen physikalischen Applets unterstützt wird. Diese bieten beispielsweise die Möglichkeit, das Schwingungsverhalten einer Feder durch Projektion mit der Sinusfunktion zu verknüpfen.

In Anbetracht dessen erwies es sich als langfristig nicht sinnvoll, die Idee eines Arbeitsblattes auf Basis von Newton-II weiterzuverfolgen, da hierdurch immer ein fester Weg vorgegeben wird, der der Vielzahl an alternativen und teils besser geeigneten Methoden nicht gerecht würde. Stattdessen sollen an dieser Stelle nur einige punktuelle Anwendungsvorschläge der Software gemacht werden, die je nach Bedarf in den Unterricht eingebaut werden können.

So kann die Simulation beispielsweise dabei helfen, das Finden der Formel für die Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (4.4.1)$$

zu unterstützen. Hier könnte entweder explorativ gearbeitet oder einfach nur der vorgegebene Zusammenhang mithilfe einer Vergleichsfunktion

$$s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega t) \qquad (4.4.2)$$

verifiziert werden, was durch die beliebig große Zahl möglicher Beispiele glaubwürdiger sein kann, als ein oder zwei Experimente. Ein weiterer Vorteil dieser Herangehensweise ist die Zeitersparnis gegenüber einer komplett experimentellen Herleitung. In diesem Zusammenhang könnte dann auch leicht die Funktion für die Geschwindigkeit

$$v(t) = -s_0 \cdot \sin(\omega t) = \dot{s}(t)$$

hergleitet werden, was wiederum für eine frühzeitige Vorstellung der Ableitung genutzt werden kann, von deren oberflächlichen Verständnis die Schüler nach der Behandlung der Methode der kleinen Schritte ohnehin nicht mehr weit entfernt sind. Eine weitere Möglichkeit zum Newton-II Einsatz wäre auch die Verifizierung der Tatsache, dass die Gewichtskraft keinen Einfluss auf den Verlauf einer reibungsfreien Schwingung hat. Was normalerweise durch einen kurzen mathematischen Exkurs hergeleitet wird, bleibt manchem Schüler möglicherweise eher im Gedächtnis, wenn er es grafisch veranschaulicht bekommt. Dazu kommen die zu Beginn der Arbeit allgemein beschriebenen Vorteile eines Modellbildungssystems gegenüber einem vorgefertigten Applet.

4.5 Gedämpfte Federschwingung

Zeitaufwand	2 Schulstunden
Vorkenntnisse	Einführung in Newton-II Lineare Kräfteaddition $F = F_1 + F_2$ Federkraft $F_{zug} = D \cdot s$ Harmonische Federschwingung $s(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ Allgemeine Exponentialfunktion
Ziele	Unterscheidung der verschiedenen Dämpfungsarten Kenntnis über Anwendungsgebiete der verschiedenen Dämpfer Analytische Beschreibung des Schwingfalls

4.5.1 Vorstellung des Arbeitsblatts

Eine Aufgabenstellung, die sich für die Bearbeitung mit Newton-II dagegen eher anbietet, ist die Untersuchung der unterschiedlichen Dämpfungsfälle einer Federschwingung. Rechnerisch ist diese nämlich mit Schulmathematik nicht und experimentell nur mit großem Aufwand möglich, was möglicherweise auch der Grund dafür ist, dass das Thema Dämpfung im bayerischen Lehrplan nicht einmal in der Oberstufe rechte Beachtung findet – eine Entscheidung, die man zwar in Anbetracht der mathematischen Hürden nachvollziehen kann, aber nicht unbedingt gutheißen muss. Denn auch diese Art von Reibung ist für den Alltag vielerorts bedeutsam und spürbar, sei es bei Türschließern, Stoßdämpfern oder Schaukeln. Und da besagte Hürden unter der Verwendung einer Modellbildungssoftware kein echtes Hindernis mehr sind, bietet sich das Thema als Ergänzung zum Themenblock harmonische Schwingungen durchaus an. Im Gegensatz zum Fall mit Luftwiderstand soll dieses Arbeitsblatt jedoch das Ziel haben, auch konkrete mathematische Formeln aus der Modellsimulation abzuleiten. Die im Folgenden vorgestellte Aufgabe ist daher insbesondere ein Beispiel dafür, wie man mithilfe von Modellbildungssoftware auch in gewissem Rahmen intuitiv analytische Lösungen herleiten kann, deren rechnerische Erschließung mit dem Kenntnisstand eines Zehntklässlers unmöglich wäre.

Dämpfungsfälle herleiten

Dazu wird klassisch das Modell einer in einer viskosen Flüssigkeit schwingenden hookeschen Feder angesetzt. Ursprünglich sollte diese Aufgabe mit der videogestützten Analyse der Schwingung einer Feder in Luft verbunden werden. Da sich die Modellierung der komplizierten Überlappung von turbulenter Newton-Reibung, laminarer Stokes-Reibung und innermaterieller Coulomb-Reibung alleine mithilfe der oben genannten Reibungskraft jedoch als nicht tragfähig erwiesen hat, musste dieser Ansatz jedoch verworfen werden. Insbesondere aufgrund der vielfach bereits beschädigten Schulfedern ist eine akkurate Simulation auch bei größerem Aufwand nicht möglich und da die Schüler gegebenenfalls selbst in der Lage sein sollten, das Experiment durchzuführen, war auch die Beobachtung einer Schwingung in Flüssigkeit aufgrund der mangelnden Ausstattung keine Option. Aus diesem Grund wird der Lernprozess dieses Mal nur mithilfe eines Newton-II Projektes stattfinden, was aber den Vorteil bringt, dass der Zeitaufwand erheblich geringer wird, wodurch die Attraktivität dieser Aufgabenreihe als kurzer Einschub in den üblichen Unterricht steigt.

Man nimmt daher nun an, dass an der schwingenden Feder nur laminare Strömungen entstehen, und setzt als Reibungskraft folglich die Stokes-Reibung an [17, p. 227], was den Schülern mithilfe eines kurzen Informationstextes auch erklärt wird:

$$F_r = -k \cdot v \qquad (4.5.1)$$

k: Reibungskonstante

v: Geschwindigkeit des Massestück

Mit dieser Vorgabe sollten die Schüler nun in der Lage sein, die aus Federkraft

$$F_{zug} = -D \cdot s \qquad (4.5.2)$$

D: Federhärte

s: Auslenkung aus der Ruhelage

und Reibungskraft F_r zusammengesetzte Formel für die Gesamtkraft

$$F = -D \cdot s - k \cdot v \qquad (4.5.3)$$

anzugeben, und mit ihrer Hilfe ein neues Newton-II Projekt zu erstellen. Dabei wird keine Skizze mehr verlangt, da die Aufgabe thematisch zu einem späteren Zeitpunkt des zehnten Schuljahres angesiedelt ist und daher die lineare Überlagerung zweier Kräfte keine Neuheit mehr sein sollte. Im Gegensatz zum Fall mit Luftwiderstand wird die Reibungskraft auch nur in vereinfachter Form angegeben, da eine genauere Auflösung des Parameters k in Anbetracht der Anordnung nur schwer möglich und für den weiteren Verlauf und die Zielsetzung der Aufgabe auch nicht vonnöten ist.

Mit ihrem nun erstellten Modell können die Schüler die sich ergebenden Graphen in Abhängigkeit von der Reibungskonstante untersuchen, wobei die Aufgabenstellung die genaue Vorgehensweise nicht vorgibt, um selbstständiges und entdeckendes Arbeiten zu unterstützen. Ihnen dürften dabei drei unterschiedliche Arten von Dämpfungen auffallen, die sie in der darauffolgenden Aufgabe genauer untersuchen sollen. Um sie auch mathematisch sauber trennen zu können, wird die Dämpfungskonstante

$$\delta = \frac{k}{2m} \qquad (4.5.4)$$

eingeführt, mit deren Hilfe die Schüler den Schwingfall ($\omega_0 > \delta$), den aperiodischen Grenzfall ($\omega_0 = \delta$) und den Kriechfall ($\omega_0 < \delta$) eindeutig identifizieren können. Sie sollten dabei außerdem in der Lage sein, die sprechenden Namen intuitiv dem richtigen Graphen zuzuordnen. In Bezug zur eingangs aufgeworfenen Thematik und auch mit dem Ziel

der technischen Bildung der Schüler, sollen diese sich im Anschluss, anhand der bisherigen Erkenntnisse, Anwendungsgebiete für die unterschiedlichen Dämpfungsarten erschließen. Beispielhaft seien hier noch einmal der Stoßdämpfer (aperiodischer Grenzfall), der Türschließer (Kriechfall) und die Stimmgabel (Schwingfall) genannt.

Lösungsfunktionen veranschaulichen

Daraufhin folgt die bereits angekündigte mathematische Erschließung des Themengebiets. Da der Schritt von der Sinusschwingung zur gedämpften Schwingung nicht weit ist, wurde diese für die weitere Behandlung ausgewählt. Um den Schülern einen Anhaltspunkt zu liefern, wird dazu die Funktion der Einhüllenden

$$s(t) = s_0 \cdot \exp(-\delta \cdot t) \qquad (4.5.5)$$

vorgebeben. Für die Schüler bleibt der Transfer zur vollständigen Funktion

$$s(t) = s_0 \cdot \exp(-\delta \cdot t) \cdot \cos(\omega t) \qquad (4.5.6)$$

mit der reduzierten Frequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad (4.5.7)$$

Hierbei werden die Schüler zwar gedanklich recht stark an die Hand genommen, doch sie können auf diese Weise immerhin einen Teil der „Herleitung“ selbst vollziehen, die ihnen andernfalls komplett verwehrt geblieben wäre. Für viele wird der Schritt zu Gleichung (4.5.7) wahrscheinlich auch einige Zeit des Nachdenkens und mehrere Versuche mit Vergleichsfunktionen in Newton-II bedürfen, sodass hier trotzdem das Gefühl entstehen kann, selbst etwas entdeckt zu haben. Um das für technische Anwendungen mangelhafte Abklingverhalten noch einmal zu betonen, sollen die Schüler in der letzten regulären Aufgabe noch eine Formel aufstellen, mit der man allgemein die Zeit berechnen kann, nach der die Amplitude der Schwingung nur noch 5% ihres Startwerts beträgt:

$$t = -\frac{\ln 0{,}05}{\delta} \qquad (4.5.8)$$

Besagte Aufgabe wiederholt außerdem die Methoden einer für die schulische Kernphysik typischen Aufgabenart, nämlich die Berechnung der Halbwertszeit eines radioaktiven Strahlers. Hauptsächlich soll sie jedoch die Schüler dazu anregen, sich bewusst zu machen, dass ihr Modell die Wirklichkeit abermals nicht detailgetreu abbildet, da die Schwingung im Modell niemals ganz abklingen würde. Im Gegensatz dazu würde sich das Verhalten

einer echten Feder bei sehr kleinen Auslenkungen nicht mehr durch das verwendete Modell beschreiben lassen, sodass sie aufgrund geschwindigkeitsunabhängiger Effekte in absehbarer Zeit doch zur Ruhe käme. Derartige Diskrepanzen treten jedoch häufig auf, wenn man versucht makroskopisch ermittelte Gesetze bis hin zum mikroskopischen Bereich auszudehnen, was zu interessanten Unterrichtsdiskussionen führen kann.

Dieser mathematisch gesehen tiefere Einstieg ins Thema setzt aber natürlich auch entsprechende Vorarbeit voraus. So müssen die Schüler mit der harmonischen Schwingung bereits so vertraut sein, dass sie diese funktionell durch Gleichung (4.4.2) beschreiben können. Auch die Eigenfrequenz (4.4.1) muss ihnen ein Begriff sein. Zuletzt müssen sie im Matheunterricht bereits die allgemeine Exponentialfunktion und in Verbindung damit die Logarithmusfunktion behandelt haben. Sind diese Grundlagen geschaffen, so dürfte auch das Rechnen mit der natürlichen Exponentialfunktion kein Problem darstellen. Sollten diese mathematischen Vorkenntnisse bei einer Klasse nicht vorhanden sein oder die Thematik der entsprechenden Lehrkraft zu exkursiv erscheinen, so spricht nichts dagegen, die Bearbeitung des Arbeitsblatts bereits nach Seite zwei zu beenden. Die Aufgaben sind bewusst so angeordnet, dass eine derartige Trennung problemlos möglich ist.

Stattdessen kann diese Thematik jetzt, da mit Newton-II ein Zugang geschaffen wurde, auch noch vertieft werden. So ist es beispielsweise mit etwas Einsatz des Schülers und einigen Hilfestellungen möglich, auch noch die Funktionsgleichung der kritischen Dämpfung herzuleiten, worauf auch die Zusatzaufgabe abzielt: Dividiert man die numerisch erzeugten Funktionswerte des Graphen einer kritischen Dämpfung durch den Faktor $s_0 \cdot \exp(-\delta t)$, so zeigt sich ein linear verlaufender Graph mit Steigung δt. Der Weg zur später noch ausführlich hergeleiteten Funktionsgleichung

$$s_{kritisch}(t) = s_0 \cdot (1 + \delta t) \cdot \exp(-\delta t)$$

ist nun nicht mehr weit. Das kann jedoch selbstverständlich nicht von jedem verlangt werden. Etwas einfacher könnte man anhand dieses Beispiels auch Stokes-, Newton- und Coulomb-Reibung vergleichen und ihre technischen Vor- und Nachteile bezüglich Effektivität, Aufwand und Verschleiß besprechen, wenn man die Fragestellung technisch ausbauen möchte. Selbst eine Diskussion über Energieumwandlungen und den Sinn von kombinierten Feder-Hydraulik-Dämpfern wäre möglich, was in einer früheren Version des Arbeitsblattes auch in Betracht gezogen wurde. Da jedoch das Hauptthema selbst schon eine Ergänzung zum Lehrplan darstellt, liegt der Fokus des Blattes nun auf dem Wesentlichen, weshalb es auch innerhalb einer Stunde bearbeitet werden kann.

4.5.2 Analytische Herleitung der Dämpfungsfälle

Da dieses Kapitel insgesamt starken Wert auf funktionale Zusammenhänge gelegt hat, werden zum Abschluss die angesprochenen Dämpfungsfälle noch hergeleitet (nach [17, pp. 342-345], wie es auch für eine schulische Seminararbeit über besagtes Thema relevant werden kann.

Die Bewegungsgleichung der Schwingung

$$m \cdot \ddot{s} = -D \cdot s - k \cdot \dot{s} \qquad (4.5.9)$$

ergibt durch Umstellen eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{s} + \frac{k}{m} \cdot \dot{s} + \frac{D}{m} \cdot s = 0$$

Verwendet man die bekannte Eigenfrequenz (4.4.1) und die bereits definierte Dämpfungskonstante (4.5.4), so reduziert sich diese Gleichung weiter zu

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0 s = 0 \qquad (4.5.10)$$

was sich mit einem Exponentialansatz lösen lässt. Setzt man also

$$s(t) = A \cdot e^{\lambda t}$$

an, so ergeben sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen, die folgenden Lösungen aus der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \qquad (4.5.11)$$

Die Diskriminante macht eine Fallunterscheidung nötig, die wiederum die drei Dämpfungsfälle erzeugt. Bei allen folgenden Rechnungen werden die Startbedingungen $x(t_0) = s_0$ und $v(t_0) = 0$ angenommen.

1. Schwingfall: $\omega_0 > \delta$

Ist $\omega_0 > \delta$, so ist die Diskriminante negativ und lässt sich deshalb umformen:

$$\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} =: i\omega$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right) = e^{-\delta t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich mit den Anfangsbedingungen schlussendlich die spezielle Lösung

$$s(t) = s_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t) \qquad (4.5.12)$$

mit der reduzierten Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Der exponentielle Anteil bildet dabei die Einhüllende der abklingenden Schwingung.

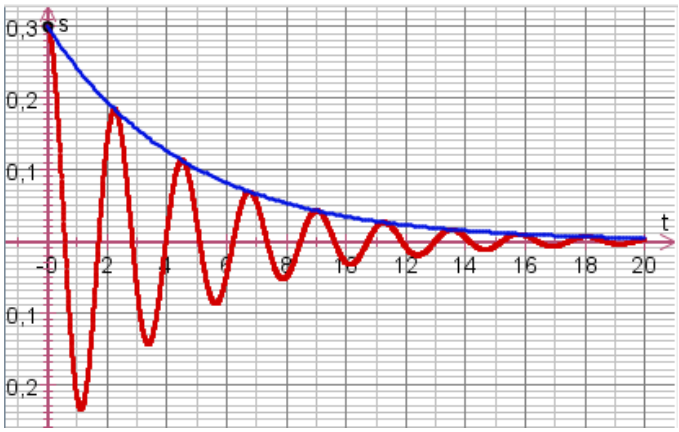


Abb. 4.5.1: Schwach gedämpfte Schwingung (rot) mit einhüllendem Graphen (blau)

2. Kriechfall: $\omega_0 < \delta$

Ist dagegen $\omega_0 < \delta$, so sind die Koeffizienten $\lambda_{1/2}$ aus Formel (4.5.11) reell, wodurch sich die allgemeine Lösung aus

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t})$$

mit $\alpha = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ ergibt. Nach wenigen weiteren Schritten führen die gewählten Anfangsbedingungen zu

$$A_{1/2} = \frac{\alpha \pm \gamma}{2\alpha} \cdot s_0$$

womit sich die spezielle Lösung wie folgt schreiben lässt:

$$s(t) = \frac{s_0}{\alpha} \cdot e^{-\gamma t} \cdot [\alpha \cdot \cosh(\alpha t) + \gamma \cdot \sinh(\alpha t)] \qquad (4.5.13)$$

Der hierdurch beschriebene Funktionsgraph nähert sich kontinuierlich, aber sehr langsam der Zeitachse an (vgl. Abb. 4.5.2). Dieser Effekt wird umso stärker, je größer δ ist, was bedeutet, dass der am schnellsten abklingende Dämpfungsfall zwischen Schwingfall und Kriechfall liegen muss.

3. Aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \delta$

Die beschriebene schnellste Annäherung findet sich im sogenannten aperiodischen Grenzfall bei $\omega_0 = \delta$. Da die in Gleichung (4.5.11) definierten Parameter $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ nun

entartet sind, muss der Exponentialansatz um einen zeitabhängigen Vorfaktor ergänz werden. Der neue Ansatz

$$x(t) = C(t) \cdot e^{\lambda t}$$

kann in die ursprüngliche Differentialgleichung (4.5.10) eingesetzt werden. Es folgt:

$$\ddot{C} + (2\lambda + 2\delta)\dot{C} + (\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)C = 0$$

Verwendet man zusätzlich noch $\lambda = -\delta = -\omega_0$ nach Gleichung (4.5.11), so ergibt sich $\ddot{C} = 0$ und damit wiederum $C = A_1 t + A_2$, womit die allgemeine Lösung feststeht. Die spezielle Lösung kann man wieder mit den Anfangsbedingungen berechnen:

$$s(t) = s_0 \cdot (1 + \delta t) \cdot e^{-\delta t} \qquad (4.5.14)$$

Die folgende Abbildung veranschaulicht noch einmal den Übergang vom Schwingfall (unterkritische Dämpfung) über den aperiodischen Grenzfall hin zum Kriechfall.

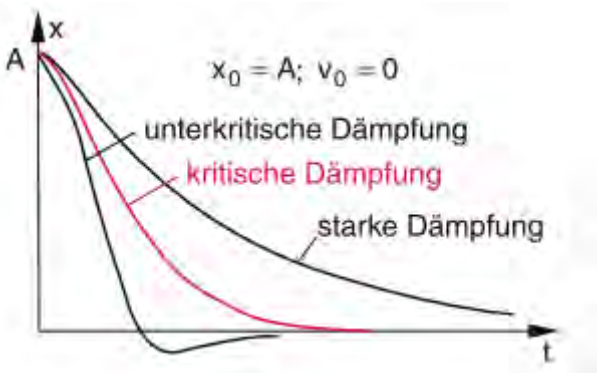


Abb. 4.5.2: Übergang von unterkritischer Dämpfung zu überkritischer Dämpfung. Quelle: [17, p. 344]

4.6 Feder-Faden-Pendel

Zeitaufwand	2 Schulstunden
Vorkenntnisse	Einführung in Newton-II Lineare Kräfteaddition $F = F_1 + F_2$ Federkraft $F_{zug} = D \cdot s$ Kräftezerlegung (Sinus/Kosinus am rechtwinkligen Dreieck) Zweidimensionale Bewegungen
Ziele	Eigenständiges und freies Arbeiten Kenntnisse über den Schmetterlingseffekt, sowie über starke und schwache Kausalität

Zum Abschluss dieses Kapitels wird nun noch ein Arbeitsblatt vorgestellt, dessen Vorgehensweise sich abermals ein wenig von den Vorherigen unterscheidet, denn hier ist weder die Arbeit mit Messdaten, noch die Herleitung irgendwelcher Formeln das Ziel. Vielmehr sollen die Schüler Raum haben, ein Phänomen selbstständig zu erforschen, ohne durch die Aufgabenstellungen allzu sehr eingeengt zu werden.

Chaosforschung im Unterricht

Als Thema wurde dafür die Untersuchung des sogenannten Feder-Faden-Pendels gewählt, also eines Federpendels, das im zweidimensionalen Raum ausgelenkt werden kann. Inhaltlich schließt es dadurch nicht nur an das bereits behandelte Federpendel, sondern aufgrund der resultierenden Schwingungsmuster auch an den Themenblock zu chaotischem Verhalten bzw. zur starken Kausalität im Lehrplan an. Vorgänge, die der starken Kausalität unterliegen, erzeugen bei ähnlichen Ursachen auch ähnliche Wirkungen, was bei quasi allen in der zehnten Klasse im Physikunterricht untersuchten Gegebenheiten der Fall ist. Bei vielen in der Natur vorkommenden Phänomenen trifft diese starke Kausalität jedoch nicht zu. Wirft man beispielsweise ein Kartenspiel, so werden die einzelnen Karten aller Voraussicht nach bei keinem weiteren Wurf exakt so zur Ruhe kommen, wie beim ersten Versuch, weshalb man dieses Verhalten zuweilen auch als chaotisch bezeichnet. Tatsächlich ist diese Benennung oftmals nicht ganz richtig, denn im Gegensatz zur sprachlichen Bedeutung dieses Worts, ist es meistens vielmehr so, dass bereits sehr kleine Änderungen der Anfangsbedingungen langfristig große Auswirkungen auf den weiteren Verlauf des Experiments haben. Man nennt dieses Phänomen auch Schmetterlingseffekt auf Basis der Vorstellung, dass der Flügelschlag eines Schmetterlings andernorts einen Tornado auslösen könnte.
In der Schule werden zur qualitativen bis halbquantitativen Untersuchung dieser Effekte häufig das Pohlsche Rad oder ein Magnetpendel herangezogen, wobei beide Varianten ihre Vor- aber jeweils auch entsprechende Nachteile haben. Das Pohlsche Rad beispielsweise ist für derartige Untersuchungen prädestiniert, weil sich alle Parameter sehr genau festlegen und überwachen lassen. Auf der anderen Seite beruht dessen Funktionsweise auf Drehmomenten, die im Lehrplan eine eher untergeordnete Rolle spielen und daher für Schüler schwer verständlich sind. Das Magnetpendel wiederum wird meist derart genutzt, dass mithilfe einer vorgefertigten Applikation eine Grafik gezeichnet wird, die die Endposition des Pendels in Abhängigkeit vom Startpunkt zeigt, wodurch die Verletzung der starken Kausalität deutlich sichtbar wird. Gleichzeitig bleibt diese Simulation jedoch eine Blackbox, was ihre Glaubwürdigkeit für die Schüler immer ein wenig in Frage stellt.

An dieser Stelle stellt das Feder-Faden-Pendel eine ernstzunehmende Alternative dar. Dessen Schwingungsmuster reagieren meist ebenfalls äußerst sensibel auf Veränderungen, wodurch den Schülern der Schmetterlingseffekt genauso gut nahegebracht werden kann. Der Vorteil an diesem Experiment ist, dass zusätzlich zur Federkraft nur die ebenfalls bekannte Gewichtskraft wirkt, wodurch das Verständnis der Funktionsweise für die Schüler, im Gegensatz zu den beiden anderen Experimenten, keine Hürde mehr ist. Im Gegenteil sind sie dadurch in der Lage das Problem eigenständig mithilfe von Newton-II zu modellieren und frei zu untersuchen, was ja auch das Hauptziel des Arbeitsblattes ist.
Die Aufgaben sind derart gestellt, dass sie den Schülern eine grobe Untersuchungsrichtung und Hilfsmittel an die Hand geben, aber ihnen noch Raum für eigene Entscheidungen lassen, wodurch die Experimentierkompetenz der Schüler gefördert und infolge eines gewissen „Entdeckerdrangs“ auch das Interesse am Thema geweckt werden soll. Diese Vorgehensweise verlangt jedoch natürlich nach einem erheblich größeren Zeitaufwand als ein bloßes Unterrichtsexperiment, denn insbesondere im Gegensatz zum Magnetpendel ist der untersuchte Effekt auch nicht sofort für jeden offensichtlich. Zudem ist eine experimentelle Durchführung mit festgelegten Kontrollparametern aufgrund der hohen Sensitivität und unvermeidlicher Torsionsschwingungen nahezu unmöglich, was auch der größte Nachteil gegenüber den alternativen Herangehensweisen ist. Hier muss also nicht nur zwischen Aufwand und Nutzen abgewogen werden, doch gerade, wenn am Ende des Themenblocks zur Newton-Mechanik noch ausreichend Zeit oder kein Magnetpendel vorhanden ist, bietet sich dieses Experiment als ein etwas interaktiverer Ausblick an.

Modellierung in Newton-II

Begonnen wird wie immer mit der Herleitung der wirkenden Kraft, wobei die Schüler neben dem bisher verlangten Wissen auch grundlegende Kenntnisse über zweidimensionale Bewegungen und damit zusammenhängend auch über Kräftezerlegungen, beispielsweise mit Sinus und Kosinus am rechtwinkligen Dreieck, mitbringen sollten. Um dabei die relevante Auslenkung s der Feder aus der Ruhelage zu bestimmen, müssen sie zunächst eine Formel zur Berechnung der aktuellen Gesamtlänge l mithilfe der x- und y-Koordinate des Massestücks aus dem Satz des Pythagoras herleiten:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (4.6.1)$$

Wenn man festlegt, dass s bei gedehnter Feder positiv sein soll, ergibt sich daraus:

$$s = l - l_0 \qquad (4.6.2)$$

Zuletzt muss noch die gesamte Federkraft (4.5.2) in zwei Teilkräfte in x- und y-Richtung zerlegt werden. Wenn man mit Kräftezerlegungen nicht vertraut ist, hilft es den Winkel α zur x-Achse zu betrachten. Dann ergibt sich

$$\frac{F_{zugy}}{F_{zug}} = \sin\alpha = \frac{y}{l}$$

$$\frac{F_{zugx}}{F_{zug}} = \cos\alpha = \frac{x}{l}$$

und damit

$$F_{zugx} = F_{zug} \cdot \frac{x}{l}$$

$$F_{zugy} = F_{zug} \cdot \frac{y}{l}$$

Zusammen mit der Gewichtskraft können daraus die Gesamtkräfte in x- und y-Richtung gebildet und in Newton-II modelliert werden:

$$F_x = -D \cdot s \cdot \frac{x}{l} \qquad (4.6.3)$$

$$F_y = -D \cdot s \cdot \frac{y}{l} - m \cdot g \qquad (4.6.4)$$

Die eigentliche Hinführung zum Schmetterlingseffekt erfolgt anschließend durch schrittweise Klassifizierung unterschiedlicher Schwingungsmuster.

Theoretischer Hintergrund

Bevor auf die genaue Vorgehensweise eingegangen wird, sollten noch ein paar weiterführende Worte zu chaotischen Systemen im Allgemeinen verloren werden. Damit ein schwingendes System chaosfähig wird, muss es mindestens drei Bedingungen erfüllen: Es muss nichtlinear sein und mindestens drei Freiheitsgrade haben. Außerdem muss mindestens eine Stelle sensitiver Abhängigkeit existieren, die sich für gewöhnlich durch ein lokales Maximum im Potentialverlauf bemerkbar macht. [30, pp. 58-63] Die erste Bedingung erfüllt das dem Feder-Faden-Pendel zugrundeliegende Differentialgleichungssystem offensichtlich und Freiheitsgrade sind einfach durch die jeweils zweidimensionalen Weg- und Geschwindigkeits-Zustände gegeben. Da das Pendel als konservatives System angenommen wird, wird dieses aufgrund des Energiesatzes als Zwangsbedingung schlussendlich wieder auf drei Freiheitsgrade reduziert. Dies ist ein deutlicher Unterschied zu eindimensionalen Schwingern, wie dem Pohlschen Rad, bei dem der dritte Freiheitsgrad durch eine

äußere Anregung induziert wird und zusätzlich eine Dämpfung miteingebaut werden muss. Tatsächlich erzeugen solche dissipativen Systeme eine gänzlich andere Art von Chaos, was sich bei genauerer Betrachtung im Phasenraum bemerkbar macht. Für den weiteren Verlauf dieses Arbeitsblattes und die schulische Chaosbehandlung im Allgemeinen haben diese Fakten jedoch keine echte Bedeutung, weswegen für ein tiefergehendes Studium dieses Themengebietes, beispielsweise auch in Verbindung mit einer schulischen Seminararbeit, neben der bereits referenzierten Broschüre des rheinland-pfälzischen Kultusministeriums auch noch die Werke von Worg [31] und Heinrichs [32] empfohlen seien. Dort werden auch die im Folgenden nur qualitativ vorgestellten Schwingungsmuster des Feder-Faden-Pendels mithilfe des Poincaré-Schnitts genauer untersucht. Zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit war die Anwendung dieser Methode in Newton-II aufgrund einer Einschränkung der zugrundeliegenden Programmbibliotheken nicht möglich, was sich aber in zukünftigen Versionen ändern kann.

Chaotische Schwingungsmuster

Die Aufgabe der Schüler besteht nun als erstes darin, einige periodische Schwingungen zu finden, also solche, deren Schwingungsmuster sich auch bei einem langem Beobachtungszeitraum immer gleichbleibend wiederholt. Diese Eigenschaft sollen sie anschließend an einer von ihnen ausgewählten Schwingung auch noch einmal überprüfen, indem sie zusätzlich eine der eindimensionalen Schwingungskomponenten betrachten, also beispielsweise das x(t)-Diagramm. Ausgehend von dieser Schwingung sollen die Schüler die Startposition ein wenig stärker verändern. Sie werden feststellen, dass das Muster auffächert und bei größeren Beobachtungszeiträumen einen klar definierten Bereich ausfüllt. Jede einzelne Periode ähnelt dabei jedoch noch immer der ursprünglichen periodischen Schwingung, was vor allem bei der Betrachtung der eindimensionalen Schwingung deutlich wird. Man nennt diesen Schwingungstypus daher auch quasiperiodisch.

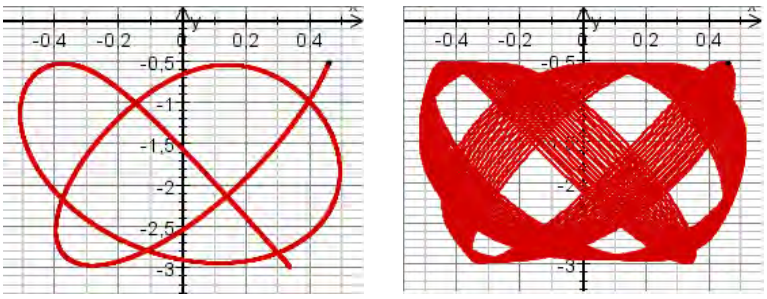


Abb. 4.6.1: Vergleich einer periodischen Schwingung (links) mit einer durch geringfügige Veränderung des Startpunkts ($\Delta y_0 = 1cm$) daraus hervorgegangenen quasiperiodischen Schwingung (rechts) über einen Beobachtungszeitraum von 100s. Auch nach längerer Zeit ist das anfängliche Muster noch erkennbar.

Bereits hier wird eine gewisse Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen deutlich, die jedoch noch kein chaotisches Verhalten bewirkt. Um solches zu verursachen, muss das Massestück in der Nähe des Aufhängepunkts vorbeischwingen, an dem sich die durch die Theorie geforderte Stelle sensitiver Abhängigkeit befindet. In der Erzeugung eines solchen Falles besteht auch die nächste Aufgabe für die Schüler, wobei ihnen das gesuchte Phänomen mithilfe einer Abbildung vorher verdeutlicht wird. An dieser Stelle werden zwar die explorativen Möglichkeiten nicht gänzlich ausgenutzt, jedoch hat sich diese Vorgehensweise als ein guter Kompromiss erwiesen, um den Großteil der Schüler erreichen zu können. Zudem bleibt es weiterhin ihnen überlassen, die chaotische Schwingung von der quasiperiodischen abzugrenzen, wobei sich hier abermals die Beobachtung der eindimensionalen Schwingung anbietet, in der man deutlich erkennen kann, dass sich die Form der einzelnen Perioden zunehmend verändert.

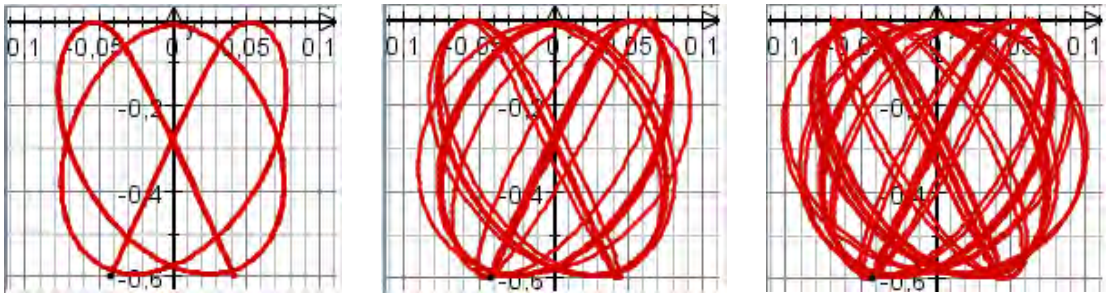


Abb. 4.6.2: Chaotisches Schwingungsverhalten bei unterschiedlichen Beobachtungszeiträumen (10s, 20s, 30s). Das anfängliche Muster ist bereits nach kurzer Zeit nicht mehr erkennbar.

Weiterführende Aufgaben

Die letzten beiden Aufgaben dienen dazu, vom für schulische Belange ungünstigen Chaosbegriff auf die starke Kausalität und den bereits erwähnten Schmetterlingseffekt überzuleiten. Dabei sollen die Schüler selbst erkennen, dass sich das Pendel keinesfalls willkürlich verhält, sondern noch immer der Newtonschen-Dynamik folgt, weswegen bereits der Begriff deterministisches Chaos eine Verbesserung darstellt. Diese neuen Begriffsbildungen sollen sie nun auch auf ihre Umwelt übertragen und weitere geeignete Beispiele für die Verletzung der starken Kausalität finden. Neben dem bereits erwähnten Kartenspiel wären an dieser Stelle die Planetenbewegungen noch ein perfektes Exempel, das auch der konservativen Natur des verwendeten Pendelmodells genügen würde. Da diese Antwort jedoch nicht unbedingt zu erwarten ist, seien an dieser Stelle noch etwas geläufigere Beispiele wie das Wachstum von Pflanzen, die Wetterentwicklung oder auch das bekannte Doppelpendel

genannt. Das Werfen eines Würfels ist dagegen an sich keineswegs chaotisch. Die Zufälligkeit liegt hierbei vielmehr in mangelnden motorischen Fertigkeiten des Würfelnden.
Zuletzt kann diese Aufgabe auch genutzt werden, um noch einmal auf die grundsätzliche Funktionsweise eines Numerikprogramms einzugehen, wozu die Zusatzaufgabe dient. Es wird nämlich deutlich, dass auch die Verkleinerung der Schrittweite einen extremen Einfluss auf den Verlauf des chaotischen Schwingungsmusters hat, was zwar im Grunde nicht überraschend ist, jedoch den ein oder anderen Schüler noch einmal zum Auffrischen seines Wissens anregen wird.

Reibung im Realexperiment

Möchte man das Experiment real durchführen, so bieten sich zur Auswertung entweder eine Videoanalyse beispielsweise mit der Software Tracker oder eine langzeitbelichtete Fotografie mit einer am Massestück befestigten Leuchtdiode an. Insbesondere letztere Variante liefert zwar interessante Bilder, doch für die unterrichtliche Bearbeitung sind beide Methoden aus den zu Beginn des Kapitels genannten Gründen nicht wirklich zu empfehlen. Dazu kommt noch, dass für einen angebrachten Vergleich der Schwingungen eine Vielzahl an Aufnahmen vorgenommen werden muss, deren Auswertung einiges an Zeit beansprucht und deren Anzahl doch niemals an die Fülle der durch die Simulation erzeugten Beispiele heranreicht. Und selbst wenn man dieses Problem umgehen konnte, zerstören Reibungseffekte die Muster bereits nach wenigen Sekunden und stehen so einer zielgerichteten Erforschung des Chaos' im Weg.

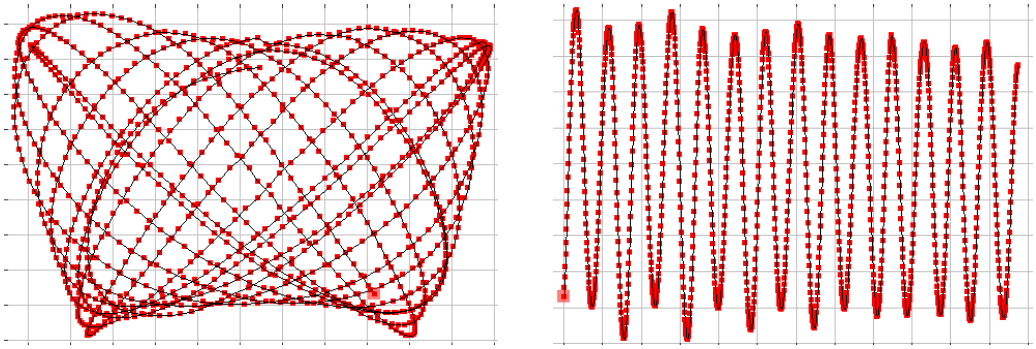


Abb. 4.6.3: 12-sekündige Aufnahme eines realen Feder-Faden-Pendels mit x-y-Diagramm (links) und t-y-Diagramm (rechts). Bereits nach wenigen Sekunden sorgt die Reibung zu einer deutlichen Verringerung der Amplitude und infolgedessen zur Veränderung des Schwingungsmusters – man beachte hierfür auch die Krümmung der Bahnen im x-y-Diagramm. Die Auswertung erfolgte mit der Software Tracker.

5 Schülermeinungen

Um nicht nur die Sicht des Lehrenden auf Newton-II und die obigen Aufgabenstellungen in diese Arbeit einzubringen, wurden auch Schülermeinungen mithilfe eines Fragebogens erfasst. Die befragte Klasse stammt aus einem sprachlich/musischen-Gymnasium und ihre einzigen Kontakte mit Newton-II waren bisher die Bearbeitung des Aufgabenblatts „Fall mit Luftwiderstand“ am Ende der neunten Klasse sowie die Einheit „Gedämpfte Federschwingung“ im ersten Halbjahr der zehnten Klasse. Die Befragung wurde nach besagter zweiter Einheit vorgenommen, ist jedoch bei nur 15 teilnehmenden Schülern natürlich alles andere als allgemeingültig und liefert vielmehr nur einen Überblick.

Bedienung von Newton-II

Die Bedienung von Newton-II wird von den Schülern insgesamt neutral bis positiv bewertet. So hat der überwiegende Teil, übereinstimmend mit dem Eindruck der Betreuer, offenbar keine größeren Probleme die grundsätzliche Funktionsweise des Programms zu verstehen und es entsprechend zu bedienen. Auf der anderen Seite geben jedoch auch mehrere Schüler an, diesbezüglich teils massive Probleme zu haben, wodurch sich insgesamt ein neutrales Bild ergibt, das jedoch auch durch die Tatsache beeinflusst wird, dass die Klasse die Methode der kleinen Schritte und somit das numerische Prinzip im Unterricht bisher nicht durchgenommen hat. Dafür sollte also entsprechend Zeit eingeplant werden. Die Benutzeroberfläche an sich wird auch entsprechend der Erwartung deutlich positiv bewertet.

Tabelle 4.6.1: Bewertung der Bedienung von Newton-II durch Schüler. Die Zustimmung zu den angegebenen Aussagen wurde auf einer Skala von 1 (niedrigste) bis 5 (höchste) angegeben. Der Mittelwert gibt die mittlere Zustimmung an und ist zur Verdeutlichung bei Werten <2,5 bzw. >3,5 farblich markiert. Die anderen Spalten stellen die absolute Anzahl der Antworten dar.

Aussage	Nein	Neutral	Ja	Mittelw.
Ich habe das Funktionsprinzip von Newton-II verstanden.	5	0	10	3,27
Mithilfe des Tutorials war es mir problemlos möglich Newton-II zu bedienen.	6	1	8	3,00
Die Benutzeroberfläche von Newton-II ist leicht verständlich.	3	4	8	3,53
Fehler in meinen Modellgleichungen lassen sich mit Newton-II gut aufdecken.	4	5	6	3,27

Arbeit mit Newton-II

Dieser Abschnitt des Fragebogens liefert einige Erkenntnisse, auch wenn die Befragung von nur 15 Schülern eines musischen Gymnasiums mit Sicherheit nicht repräsentativ ist.

So gibt beispielsweise kein einziger Schüler an, dass er sich zum jetzigen Zeitpunkt in der Lage sieht, weitere physikalische Probleme mit Newton-II zu lösen. Gleichzeitig erkennen jedoch mehrere Schüler die Vorzüge von Newton-II gegenüber anderen Methoden und würden sich trotz ihrer Schwierigkeiten bei der selbstständigen Arbeit eine Einbindung in den regulären Unterricht wünschen. Derart vorbereitet würde vermutlich auch der Zuspruch zu komplizierteren Aufgabenstellungen in Freiarbeit größer ausfallen. Was aus der hier gewählten Datendarstellung nicht hervorgeht, jedoch auch nicht weiter überrascht, ist die Tatsache, dass der durch Newton-II begründete Lernfortschritt stark mit dem Verständnis des Programms korreliert.

Tabelle 4.6.2: Bewertung der Arbeit mit Newton-II durch Schüler.

Aussage	Nein	Neutral	Ja	Mittelw.
Die Arbeit mit Newton-II hat mir beim Verständnis des Themas geholfen.	5	4	6	3,00
Ich sehe mich in der Lage auch andere physikalische Probleme mit Newton-II zu lösen.	10	5	0	2,13
Die Arbeit mit Newton-II war eine interessante Abwechslung.	0	5	10	3,93
Ich würde Newton-II bei der Untersuchung weiterer physikalischer Fragestellungen anderen Methoden (z.B. vorgefertigten Simulationen) vorziehen.	5	5	5	3,07
Ich würde gerne erneut komplizierte Probleme mit Newton bearbeiten.	8	5	2	2,40

Arbeitsblatt „Gedämpfte Federschwingung“

Die hier gegebenen Antworten bestätigen abermals, dass die Schüler vor der Freiarbeit etwas mehr Anleitung erhalten müssen, da die Aufgaben in Anbetracht der auffällig vielen neutralen Antworten wohl eher als zu schwer empfunden werden. Ansonsten ist die Bewertung überwiegend positiv ausgefallen.

Tabelle 4.6.3: Bewertung des Arbeitsblatts „Gedämpfte Federschwingung“ durch Schüler.

Aussage	Nein	Neutral	Ja	Mittelw.
Das Thema war eine interessante Ergänzung zum Lehrplan.	1	4	10	3,80
Die Aufgabenfolge war logisch und für mich nachvollziehbar.	2	7	6	3,40
Die Fragestellungen haben mir ausreichend Spielraum zum selbstständigen Arbeiten gelassen.	0	6	9	3,80
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben war angemessen.	3	8	4	3,07

6 Ausblick

Modellbildungssysteme im Allgemeinen und Newton-II im Speziellen bieten einiges an Potential für den Physikunterricht. Sie bieten eine gewinnbringende Alternative zu vorgefertigten Simulationen und können helfen das Systemverständnis zu schulen. Newton-II lässt sich durch seine einfach verständliche Oberfläche auch schon ohne größere Einarbeitungszeit verwenden. Diese Arbeit hat anhand von mehreren Arbeitsblättern aufgezeigt, wie bei der angeleiteten Arbeit mit Newton-II vorgegangen werden kann und welche Möglichkeiten sich dadurch bieten. Um den Nutzen zu maximieren, sollte der Einsatz jedoch nicht unvorbereitet und einmalig, sondern vielmehr systematisch und kontinuierlich erfolgen. Sind die Schüler aber an das auch vom Lehrplan geforderte Aufstellen von Kraftgleichungen und die Auswertung mit einem entsprechenden Programm gewöhnt, so sind die Möglichkeiten für interessante Aufgabenstellungen nahezu unbegrenzt.

So können die vorgestellten Arbeitsblätter und auch die Untersuchung des Stratos-Sprungs als Einführung ins Thema gesehen werden und als Inspiration für mehr dienen, sei es ein Keplerproblem oder eine vom Tisch rutschende Kette. Mit der Einführung von Differentialgleichungen in der Oberstufe bietet sich dann auch der Umstieg von Newton-II auf dessen Parallelentwicklung mit identischer Benutzeroberfläche Fluxion [33] an, das dann entsprechend auch die Untersuchung von allgemeineren Problemen wie beispielsweise eines Schwingkreises, eines mehrstufigen Raketenstarts oder gar – im Zuge einer Seminararbeit – eines chaotisch schwingenden Pendels ermöglicht.

Das Arbeiten am Computer und insbesondere das Arbeiten mit Modellbildungssystemen können somit den Schulunterricht auf eine Art bereichern, die mit klassischen Methoden nicht zu erreichen ist.

7 Literaturverzeichnis

[1] Bayerisches Kultusministerium, „Lehrplan Physik Bayern," [Online]. Available: http://www.isb-gym8-lehrplan.de/. [Zugriff am 01 April 2018].

[2] Lehrstuhl für Physik und ihre Didaktik - Universität Würzburg, „Did-Apps: Über Newton-II," [Online]. Available: https://did-apps.physik.uni-wuerzburg.de/Newton-II/ueberNewton-II/. [Zugriff am 14 November 2018].

[3] S. Mikelskis-Seifert, M. Thiele und T. Wünschner, „Modellieren - Schlüsselfähigkeit für physikalische Forschungs- und Lernprozesse," *Physik und Didaktik in Schule und Hochschule,* Nr. 1/4, pp. 30-40, 2005.

[4] E. Kircher, „Modellbegriff und Modellbildung in der Physikdidaktik," in *Physikdikdatik - Theorie und Praxis*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2015, pp. 784-807.

[5] S. Mikelskis-Seifert, „Modelle - Schlüsselbegriff für Forschungs- und Lernprozesse in der Physik," in *Didaktik der Physik - Beiträge zu den DPG Lehrertagen*, Regensburg, 2010.

[6] S. Mikelskis-Seifert, „Modellmethode als epistemologisches und didaktisches Konzept," in *Physik-Didaktik : Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, Berlin, Cornelsen-Scriptor Verlag, 2010, pp. 120-139.

[7] Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, „Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss," München, 2005.

[8] S. Lück und T. Wilhelm, „Modellierung physikalischer Vorgänge am Computer," *Praxis der Naturwiswsenschaften Physik,* Nr. 122, pp. 26-31, 2011.

[9] T. Bell, „Entdeckendes und forschendes Lernen," in *Physik Methodik: Handbuch für die Sekundarstufe I und II*, T. Rabe, Hrsg., Berlin, Cornelsen-Scriptor, 2012, pp. 70-82.

[10] V. Berger, „Mit dem Computer im Unterricht modellieren," in *Physik-Didaktik : Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, Berlin, Cornelsen Scriptor Verlag, 2010, pp. 139-149.

[11] M. Wenzel und T. Wilhelm, „Erhebung zum Einsatz Neuer Medien bei Physik-Gymnasiallehrern," in *Didaktik der Physik - Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung*, Wuppertal, 2015.

[12] J. Ludwig, „Vergleich verschiedener Modellbildungssysteme," 2012. [Online]. Available: http://www.thomas-wilhelm.net/arbeiten/Zulassungsarbeit%20Modellbildung.pdf.

[13] N. Hermann, Höhere Mathematik für Ingenieure, Physiker und Mathematiker, München: Oldenburg Verlag, 2004.

[14] H. Günzel, Gewöhnliche Differentialgleichungen, München: Oldenburg Verlag, 2008.

[15] G. Heinzel, „Beliebig genau: Moderne Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen," *c't,* Nr. 8, pp. 172-185, 1992.

[16] D. Brown, „Tracker Video Analysis and Modeling Tool," [Online]. Available: https://physlets.org/tracker/. [Zugriff am 30 April 2018].

[17] W. Demtröder, Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme, Berlin: Springer-Spektrum, 2018.

[18] Red Bull, „Red Bull Stratos: Summary Report: Findings of the Red Bull Stratos Scientific Summit," 23 Januar 2013. [Online]. Available: https://issuu.com/redbullstratos/docs/red_bull_stratos_summit_report_final_050213. [Zugriff am 01 April 2018].

[19] M. Guerster und U. Walter, „Aerodynamics of a highly irregular body at transonic speeds - Analysis of STRATOS flight data," 7 Dezember 2017. [Online]. Available: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0187798. [Zugriff am 20 April 2018].

[20] Red Bull, „Red Bull Stratos FULL POV - Multi-Angle + Mission Data," 14 10 2013. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=raiFrxbHxV0. [Zugriff am 18 April 2018].

[21] Red Bull, „Red Bull Stratos," [Online]. Available: http://www.redbullstratos.com/. [Zugriff am 01 April 2018].

[22] S. F. Hoerner, Fluid-dynamic drag practical information on aerodynamic drag and hydrodynamic resistance, Bakersfield, 1965.

[23] J. S. Rinehart und G. E. Hansche, „Air Drag on Cubes at Mach Numbers 0.5 to 3.5," *Journal of the Aeronautical Science,* Nr. 19, pp. 83-84, 1952.

[24] NASA, *U.S. Standard Atmosphere 1976,* Washington D.C.: U.S. Government Printing Office, 1976.

[25] International Civil Aviation Organization, *Manual of the ICAO Standard Atmosphere,* International Civil Aviation Organization, 1993.

[26] National Geospatial-intelligence Agency, *World Geodetic System 1984,* Office of Geomatics, 2014.

[27] National Geospatial-Intelligence Agency, „DMA TECHNICAL REPORT TR8350.2-a," 1987.

[28] J. D. J. Anderson, Fundamentals of Aerodynamics, New York: McGraw-Hill, 2001.

[29] F. Theilmann und M. Apolin, „Supersonic freefall - a modern adventure as a topic for the physics class," *Physics Education,* Bd. 48, Nr. 2, 2013.

[30] J. Leisen, D. Fries und J. Dr. Luggen-Hölscher, *Nichtlineare dynamische Systeme und Chaos,* Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, 2000.

[31] R. Worg, Deterministisches Chaos: Wege in die nichtlineare Dynamik, Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag, 1993.

[32] G. Heinrichs, Chaos: Einführung in eine neue physikalische Theorie, Köln: Aulis-Verlag Deubner, 1993.

[33] Lehrstuhl für Physik und ihre Didaktik - Universität Würzburg, „Did-Apps: Über Fluxion," [Online]. Available: https://did-apps.physik.uni-wuerzburg.de/Fluxion/ueberFluxion/. [Zugriff am 2019 Januar 05].

8 Anhang

Anhangsverzeichnis

Einführung in Newton-II – Freier Fall ohne Luftwiderstand..... 4 Seiten

Übungsaufgaben ..... 1 Seite

Tracker Kurzanleitung ..... 1 Seite

Fall mit Luftwiderstand..... 3 Seiten

Gedämpfte Federschwingung ..... 3 Seiten

Feder-Faden-Pendel ..... 5 Seiten

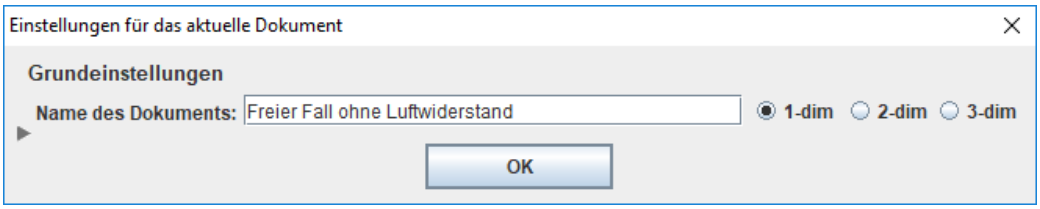
Daten-CD (Projektdateien und Arbeitsblätter) ..... Im Umschlag

Einführung in Newton-II – Freier Fall ohne Luftwiderstand

Mit *Newton-II*[1] können mechanische Probleme mit Punktmassen numerisch berechnet werden. Dies bedeutet, dass Näherungsverfahren wie die Methode der kleinen Schritte angewendet werden, um einen Bewegungsablauf zu finden, der eine physikalische Gegebenheit möglichst gut beschrieben. Der Bewegungsablauf wird durch den Ort der Punktmasse zu unterschiedlichen Zeiten *t* dargestellt. Die physikalische Gegebenheit wiederum wird durch die auf die Punktmasse wirkende und evtl. zeit- oder ortsabhängige Kraft *F* und die Startbedingungen festgelegt, also Ort, Geschwindigkeit und Zeit zu Beginn der Simulation. Zur Einführung in das Programm wirst du im Folgenden den freien Fall ohne Luftwiderstand simulieren.

1) Erstellen eines neuen Dokuments

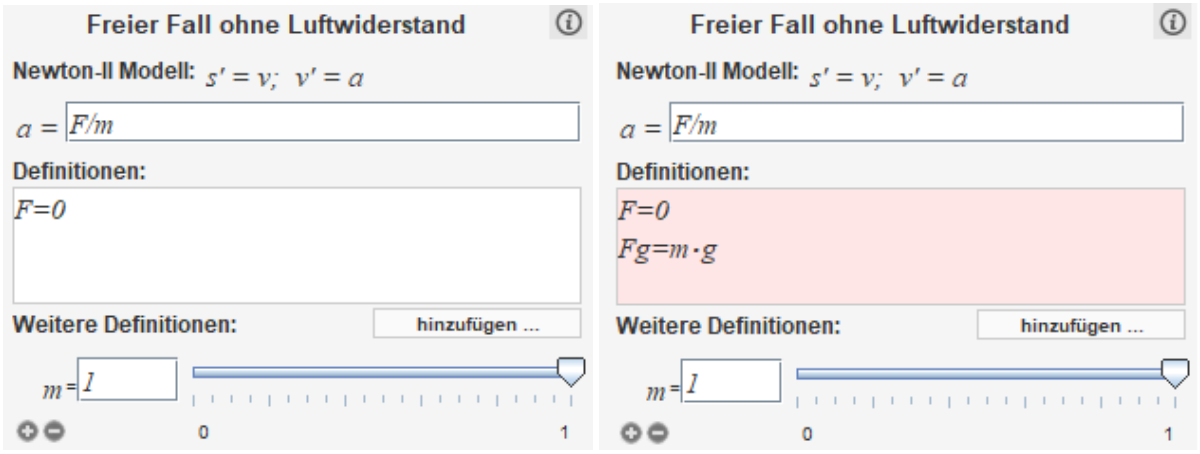
Starte das Programm *Newton-II* und klicke auf *Neues Dokument erstellen*. Ist das Programm bereits geöffnet, findest du die Option unter *Datei -> Neues Dokument*.



Nenne das Dokument „Freier Fall ohne Luftwiderstand“ und wähle *1-dim*, da es sich um ein eindimensionales Problem handelt.

2) Eingabe der Modellgleichungen

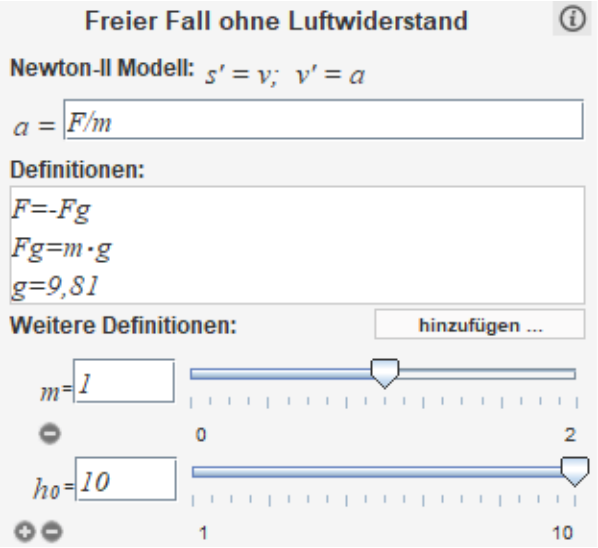
Im Bereich oben links findest du zwei Textboxen. Die Obere beschreibt die Beschleunigung des Körpers und beinhaltet gemäß des Newtonschen Gesetzes standardmäßig den Text $a = F/m$. Lass diese Zeile immer unverändert. Es folgt eine weitere Textbox mit dem Titel „Definitionen“ und dem Inhalt $F = 0$. Hier müssen bei jedem Versuch alle relevanten Gleichungen eingetragen werden, insbesondere die wirkende Gesamtkraft F. Darunter befindet sich der Bereich „Weitere Definitionen“, in dem Schieberegler für Konstanten erstellt werden können.



[1] Download auf did-apps.physik.uni-wuerzburg.de/Newton-II/

Füge nun eine weitere Zeile mit dem Inhalt $Fg = m \cdot g$ hinzu, die die Gewichtskraft beschreiben soll. Wie du siehst, färbt die Box sich rot, um dir einen Fehler anzuzeigen. Dies liegt daran, dass die Konstante g noch nicht definiert wurde. Füge deshalb eine weitere Zeile mit dem Inhalt $g = 9{,}81$ hinzu. Damit die Gewichtskraft in die Berechnung eingeht, musst du sie noch zur Gesamtkraftgleichung hinzufügen. Da die Gewichtskraft nach unten wirkt, lautet die Gleichung also $F = -Fg$. Füge zuletzt durch einen Klick auf das Plus-Symbol eine weitere Konstante h_0 hinzu, deren Wertebereich du durch einen Klick auf die Grenzen von 1 bis 10 einstellst. Achtung: Auf dem Computer werden einige Operatoren anders geschrieben als auf dem Papier. Beispielsweise können zwei Variablen nicht direkt aufeinander folgen (schreibe z.B. $a * x$ statt ax) Auch beim Dividieren musst du aufpassen und Klammern setzen (z.B. $1/(2x)$ statt $1/2x$). Beachte dazu auch untenstehende Tabelle.

Zeichen	Schreibweise
+, -, ·, :	+, -, *, /
Griech. Buchstaben (z.B. α, δ, Δ)	Rechtsklick oder *alpha, delta, Delta*
$\sqrt{a}$	*sqrt(a)*
a^b	*a^b*
a_0, a_1, …	*a_0, a_1*
$a \cdot 10^{-b}$	*aE-b*

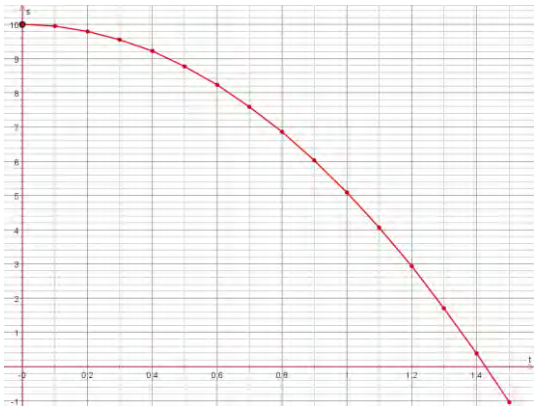


3) Einstellen der Startbedingungen

Im nächsten Abschnitt können die Startbedingungen eingestellt werden. Wähle für die Startposition $s(t_0) = h_0$, damit du sie später mit dem Schieberegler verstellen kannst und klicke anschließend auf *berechnen*.



Wie du siehst, werden die Werte auch für negative *s* noch berechnet, was physikalisch in diesem Fall natürlich wenig Sinn ergibt. Gib deshalb im Feld *Abbrechen, wenn:* die Bedingung $s < 0$ ein. Klicke anschließend erneut auf *berechnen.*



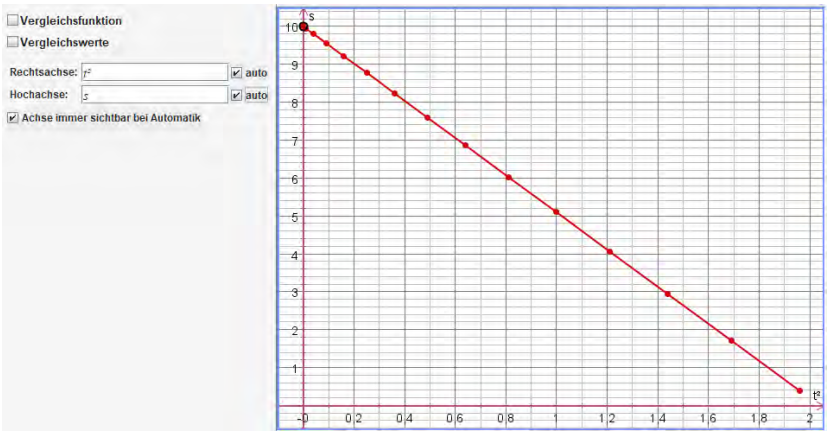
Jeder einzelne Punkt entspricht einem Berechnungsschritt. Um die Anzahl der Schritte und somit die Genauigkeit der Berechnung zu erhöhen, kannst du die Zeit zwischen zwei Schritten mit dt verringern. Gleichzeitig dauert die Berechnung aber auch länger. 0,01 ist meist ein guter Wert. Die simulierte Zeitspanne kann mit der Option Δt eingestellt werden. Sollten dir bei späteren Versuchen deine Graphen „kantig“ und falsch vorkommen, dann versuche dt zu verringern.

Experimentiere nun ein wenig mit diesen Einstellungen.

4) Die Achsen einstellen

Füge jetzt ein weiteres Diagramm hinzu, indem du in der Menüleiste unter *Diagramm* die Option *Zwei Systeme übereinander* auswählst. Es erscheint ein neues Diagramm *v(t)*. Wähle dieses nun aus, sodass ein blauer Rahmen erscheint. Ändere anschließend die Beschriftung der Rechtsachse auf t^2 (geschrieben t^2) und die der Hochachse auf s. Auf diese Weise könntest du beispielsweise den quadratischen Zusammenhang zwischen s und t bestätigen. Oftmals benötigt eine umfangreichere Simulation aber auch zusätzliche Variablen, deren Verlauf du auf diese Weise kontrollieren kannst.

Falls du die Achsenskalierung ändern möchtest, kannst du dies mit einem Rechtsklick auf die Achse tun, oder indem du sie mithilfe der gedrückten linken Maustaste verschiebst. Nach einem Klick auf das Auswahlkästchen *Auto* übernimmt der Rechner die Skalierung.



5) Vergleichsfunktion und Vergleichswerte

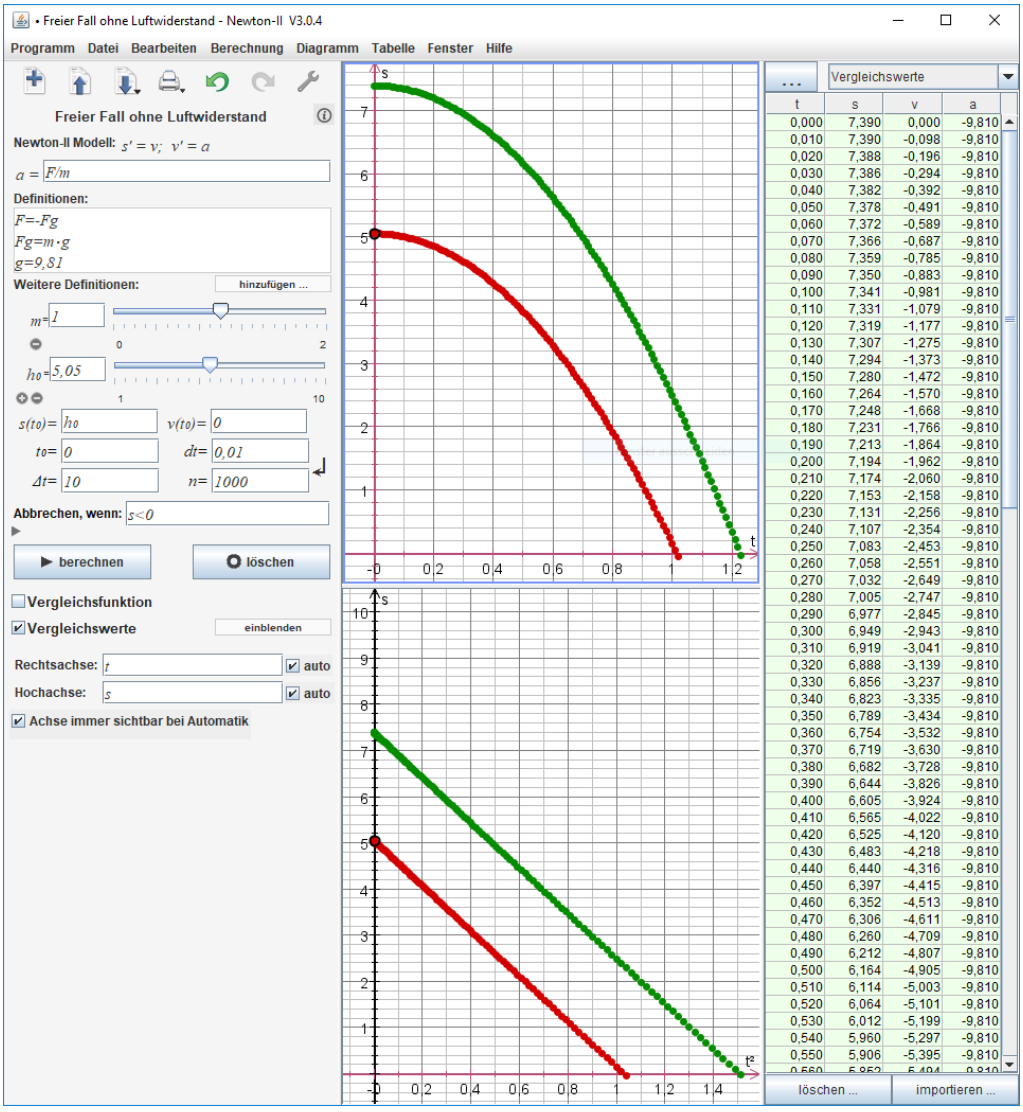
Newton-II bietet die Möglichkeit eine Vergleichsfunktion einzugeben und ihren Graphen zusätzlich einzuzeichnen. Auf diese Weise können theoretische Erwartungen bestätigt oder komplexere berechnete Probleme mit einfacheren Modellen vergleichen werden.

Verifiziere nun die Berechnungen, indem du eine Funktion eingibst, die den freien Fall beschreibt. Der blaue Graph der Vergleichsunktion und die berechneten roten Punkte sollten zur Deckung kommen, wenn dt klein genug gewählt wurde.



Ebenso können auch einzelne Vergleichswerte eingeblendet werden. Diese Funktion ist vor allem dann wichtig, wenn ein Experiment durchgeführt wurde, anhand dessen ein Modell entwickelt werden soll. Sie kann aber auch benutzt werden, um den Einfluss von Parametern auf eine Ausgangssituation zu untersuchen.

Lasse dir dazu zunächst alle berechneten Werte mit *Tabelle -> Einblenden* anzeigen. Mache einen Rechtsklick und kopiere sie durch einen Klick auf *Alle Werte kopieren*. Klicke dann links unten neben der Checkbox *Vergleichswerte* auf *einblenden* und füge die kopierten Werte mit einem erneuten Rechtsklick wieder ein. Wenn du nun noch einen Haken bei *Vergleichswerte* unterhalb von *Vergleichsfunktion* setzt, werden diese Werte als grüne Punkte eingezeichnet. Wenn du nun die Starthöhe veränderst, kannst du die beiden Graphen vergleichen.



Übungsaufgaben

1.) Erstelle ein neues eindimensionales *Newton-II* Projekt.

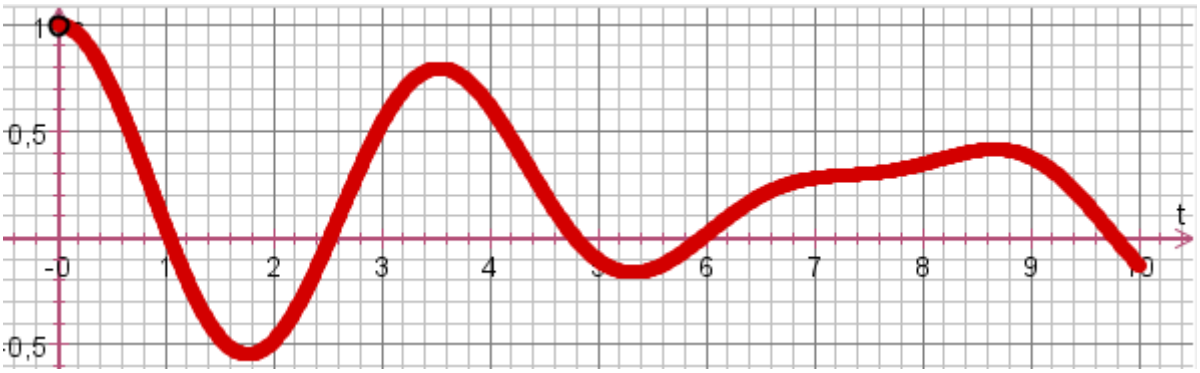
2.) Auf den untersuchten Körper wirken die Kräfte $F_1 = \sin(\gamma \cdot t)^2$ und $F_2 = \frac{1}{2\alpha} \cdot s$. Die wirkende Gesamtkraft ist $F = F_1 - F_2$. Gib die entsprechenden Gleichungen ein.

3.) Definiere $\alpha = 2 \cdot 10^{-1}$ und erstelle für die Unbekannte γ einen Schieberegler im Bereich von 1 bis 5. Erstelle außerdem einen Schieberegler s_0.

4.) Setze s_0 als die Startposition und lass das Modell berechnen.

5.) Mache die Simulation genauer, indem du dt änderst.

Zur Kontrolle (alle Schieberegler auf 1):



Übungsaufgaben

1.) Erstelle ein neues eindimensionales *Newton-II* Projekt.

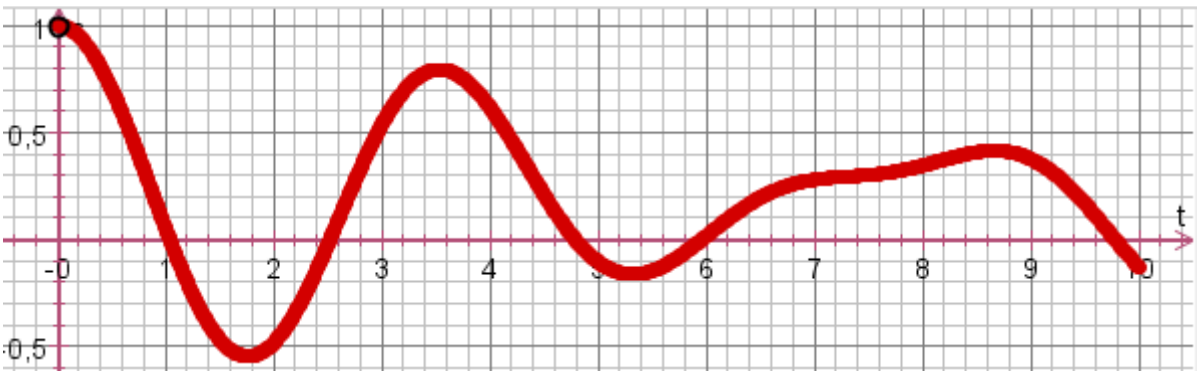
2.) Auf den untersuchten Körper wirken die Kräfte $F_1 = \sin(\gamma \cdot t)^2$ und $F_2 = \frac{1}{2\alpha} \cdot s$. Die wirkende Gesamtkraft ist $F = F_1 - F_2$. Gib die entsprechenden Gleichungen ein.

3.) Definiere $\alpha = 2 \cdot 10^{-1}$ und erstelle für die Unbekannte γ einen Schieberegler im Bereich von 1 bis 5. Erstelle außerdem einen Schieberegler s_0.

4.) Setze s_0 als die Startposition und lass das Modell berechnen.

5.) Mache die Simulation genauer, indem du dt änderst.

Zur Kontrolle (alle Schieberegler auf 1):

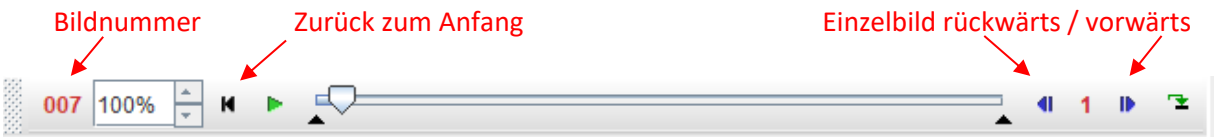


Tracker Kurzanleitung

Tracker (Download auf physlets.org/tracker/) ist eine kostenlose Videoanalysesoftware, mit deren Hilfe aus aufgenommenen Videos Bewegungsdiagramme gewonnen werden können. Im Folgenden findest du dafür eine Schritt-für-Schritt Anleitung.

1) Video importieren

Öffne das zu untersuchende Video mit einem Klick auf *Datei -> Öffnen*. Manchmal werden dabei Warnungen angezeigt, die du jedoch meistens übergehen kannst. Finde mithilfe der Bedienelemente unterhalb des Videos das Startbild und das Endbild der Bewegung. Merke die die Bildnummern.

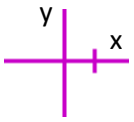


2) Videoeinstellungen vornehmen

Klicke auf den Button *Clip-Einstellungen* in der Symbolleiste. Trage hier das Startbild und das Endbild ein. Falls du eine Zeitlupenaufnahme benutzt hast, musst du außerdem die Bilddauer anpassen. Multipliziere sie dazu mit dem Zeitlupenfaktor (z.B. ½).

3) Koordinatensystem und Maßstab festlegen

Klicke auf *Koordinatenachsen sichtbar*. Richte das Koordinatensystem anschließend für dein Experiment passend aus und fixiere es mithilfe der Option *gesperrt* im Rechtsklickmenü.



Klicke danach auf *Track -> Neu -> Kalibrierungswerkzeug -> Kalibrierungsmaßstab*. Markiere mit *Umschalt + Linksklick* den Anfangs- und den Endpunkt eines Elements bekannter Länge im Bild und trage diese in der oberen Leiste ein. Mache zum Schluss einen Rechtsklick auf ihn und wähle die Option *sichtbar* ab.

4) Messwerte aufnehmen

Kehre zum Beginn des Videos zurück und erzeuge mit *Track -> Neu -> Punktmasse* eine neue zu markierende Masse. Wähle sie im *Trackkontrollfenster* aus. Für den Track gibt es zwei Möglichkeiten.

a) <u>Manuelle Verfolgung</u>
Klicke mit *Umschalt + Linksklick* auf die zu markierende Stelle. Das Video springt automatisch ein Bild vorwärts. Wiederhole dies so lange, bis du am Ende des Experiments angelangt bist.

b) <u>Automatische Verfolgung</u>
Für diese Methode muss sich das zu trackende Objekt klar vom Hintergrund abheben oder besonderes markiert sein. Öffne das *Autotrackerfenster* und markiere das zu verfolgende Objekt mit *Strg + Umschalt + Linksklick*. Zoome mit dem Mausrad heran und passe die Markierungsposition (Pfeil), den Markierungsumfang (Kreis) und das Suchgebiet (Rechteck) gegebenenfalls an. Klicke anschließend im *Autotrackerfenster* auf *Suche*. Wird die Markierung in einzelnen Bildern nicht eindeutig erkannt, muss diese entweder bestätigt oder manuell angepasst werden.

Fall mit Luftwiderstand



Im Alltag spielt der Luftwiderstand bei sich bewegenden Körpern häufig eine wichtige Rolle. Im Folgenden soll deshalb der Fall eines Wasserballs oder eines ähnlichen Körpers mithilfe der numerischen Simulation und eines Experiments genauer untersucht werden.

Dazu musst du zuerst einige Vorbereitungen treffen.

Aufgabe 1

a) Mache eine Skizze des Balls im freien Fall und zeichne alle wirkenden Kräfte ein.

i

Die Reibungskraft hängt in Luft bei höheren Geschwindigkeiten quadratisch von dieser ab. Sie hat die folgende Form:

$$F_r = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2$$

ρ: Luftdichte (Normwert: $\rho = 1{,}204\ kg/m^3$)
c_w: Strömungswiderstandskoeffizient
A: Querschnittsfläche des fallenden Körpers
v: Fallgeschwindkeit

b) Gib die Formel für die wirkende Gesamtkraft an.

$F =$ _____

c) Vermiss den Wasserball. Notiere seine Masse und berechne die Querschnittsfläche.

i **Tipp:** Der Umfang lässt sich leichter messen als der Radius!

$m =$ _____ $A =$ _____

Damit sind alle Vorbereitungen für die Simulation getroffen. Es fehlt also nur noch das eigentliche Fallexperiment. Du benutzt dazu eine Videoanalyse, weshalb du ein paar Dinge beachten solltest.

Aufnahme eines Videos zur Analyse

Montiere eine gute Videokamera um 90° gedreht auf einem Stativ oder stütze sie anderweitig ab. Es ist wichtig, dass das Video mit möglichst vielen Bildern pro Sekunde (fps) aufgenommen wird. Falls die Kamera also einen Zeitlupenmodus besitzt, in dem sie mit erhöhter Bildrate arbeitet, dann benutze diesen. Um eine möglichst gute Messung zu erreichen, solltest du die Aufnahme zudem am besten bei Tageslicht im Freien durchführen. Sorge für einen möglichst einfarbigen Hintergrund und positioniere immer auch ein Metermaß im Bild, damit du später einen Vergleichswert hast.

Aufgabe 2: Führe das Fallexperiment nun durch, indem du den Wasserball aus zirka zwei Metern Höhe fallen lässt, wenn gerade kein Wind weht. Überprüfe kurz, ob du eine gute Aufnahme hast.

Anschließend musst du das Video auf deinen Computer kopieren, damit du mit der Analyse fortfahren kannst.

Aufgabe 3

a) Mache mit *Tracker* eine Videoanalyse. Sollte die automatische Verfolgung nicht möglich sein, musst du das Video manuell auswerten. Markiere dazu in jedem Bild die Oberseite des Balls als *Masse A* und die Unterseite als *Masse B*. Mithilfe der Funktion *Track -> Neu -> Schwerpunkt* kannst du anschließend automatisch das Zentrum des Balls tracken.

Wichtig: Der Ball sollte entlang der positiven x-Achse fallen und der Boden bei ca. $x = 0$ liegen. Überprüfe dies mit einem Blick in die Messwerttabelle und drehe wenn nötig dein Koordinatensystem.

b) Erstelle ein neues *Newton-II* Projekt und modelliere den Fall mit Luftwiderstand mithilfe von Aufgabe 1. Erstelle für den Widerstandsbeiwert einen Schieberegler zwischen 0 und 1.

Tipp: Verwende eine geeignete Abbruchbedingung und verringere den dt-Wert, wenn dir der Graph zu kantig erscheint.

Aufgabe 4: Lade die aufgenommenen Messwerte in dein Projekt. Versuche die beiden Graphen zur Deckung zu bringen. Welcher Widerstandsbeiwert passt am besten zum durchgeführten Experiment?

$$c_w = _____$$

Der Widerstandsbeiwert hängt von der Form des Körpers ab und beträgt für eine Kugel nach Literatur $c_w = 0{,}4$. Diskutiere die Abweichung von deinem Messwert und mögliche Ursachen dafür.

Aufgabe 5: Gib zum Vergleich eine Funktion $s(t)$ an, die einen Fall ohne Luftwiderstand unter Berücksichtigung der Starthöhe h_0 beschreibt.

$$s(t) = _____$$

Lasse den Graphen dieser Vergleichsfunktion zusätzlich darstellen und verifiziere, dass sich dessen Verlauf vom gemessenen unterscheidet.

Aufgabe 6:

a) Was geschieht, wenn du den Ball mit einer deutlich größeren Starthöhe fallenlässt? Zeichne ein *s(t)*- und ein *v(t)*-Diagramm und skizziere die Verläufe der Graphen für diesen Fall mit und ohne Luftwiderstand.

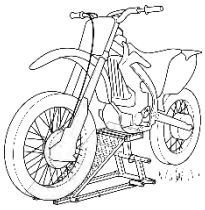
b) Wie du siehst, nähert sich die Geschwindigkeit einem Grenzwert v_G an. Erkläre diesen Verlauf.

c) Bilde mithilfe deiner Erklärung eine allgemeine Formel für diese Grenzgeschwindigkeit.

Obwohl du nur einen einfachen Wasserball geworfen hast, war aufgrund dieser Besonderheiten bereits der Einsatz von Software notwendig. Bei technischen Anwendungen, wie beispielsweise einem Fallschirmsprung, spielen noch viel mehr Faktoren eine Rolle.

Zusatzaufgabe: Welche Aspekte eines echten Sprungs bildest du mit deinem Modell ab und welche lässt du unberücksichtigt? Diskutiere die Grenzen des Modells mit deinem Banknachbarn! Stelle abschließend die Schirmöffnung mithilfe einer bedingten Variablen dar.

Gedämpfte Federschwingung



Gedämpfte Schwingungen werden beispielsweise beim Bau von Stoßdämpfern an Fahrzeugen relevant. Dazu werden meist eine Stahlfeder und ein hydraulischer (flüssigkeitsbetriebener) Dämpfer gemeinsam eingesetzt. Doch Dämpfung ist nicht gleich Dämpfung. Was das bedeuten soll und wie du diese Aussage mathematisch einengen kannst, kannst du im Folgenden herausfinden, indem du die Schwingung einer Feder mit Massestück in einer Flüssigkeit (z.B. Wasser) modellierst.

i

Bei der Bewegung eines Federpendels entsteht Reibung zwischen der Feder und dem umgebenden Medium. Handelt es sich dabei um eine Flüssigkeit, so nennt man die dafür ursächliche Kraft viskose Reibung oder auch Stokes-Reibung. Sie lässt sich durch die folgende Formel beschreiben:

$$F_r = -k \cdot v$$

k: Reibungskonstante
v: Geschwindigkeit des Massestück

Aufgabe 1:

a) Gib eine Formel für die aus Feder- und Reibungskraft kombinierte Gesamtkraft F an.

$$F = _____$$

b) Erstelle damit ein eindimensionales *Newton-II* Projekt mit Schiebereglern für Startwert s_0, Masse m, Federhärte D und Reibungskonstante k.

i

Tipp: Verringere den dt-Wert, wenn dir der Graph zu kantig erscheint.

c) Untersuche das Federverhalten in Abhängigkeit von der Reibungskonstanten und beschreibe deine Beobachtungen. Lasse dabei D und m konstant. Kannst du verschiedene Dämpfungsarten erkennen? Verändert sich die Frequenz der Schwingung?

i

Tipp: Es kann nützlich sein, den Wertebereich von k zwischendurch zu ändern, um das Verhalten bei geringer Reibung genauer zu untersuchen.

i

Du solltest drei Arten von Dämpfungen erkannt haben. Um diese besser beschreiben zu können, benötigst du eine weitere Konstante. Die Dämpfungskonstante δ.

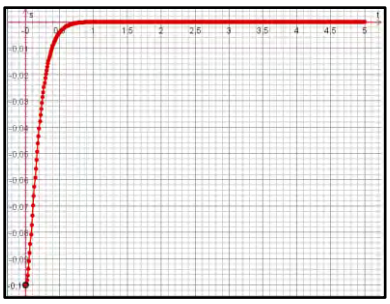
$$\delta = \frac{k}{2m}$$

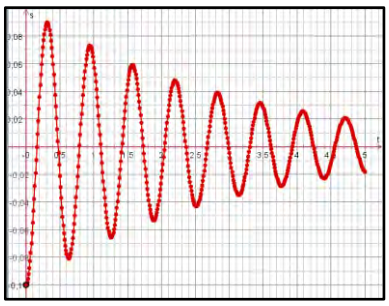
Ihre Bedeutung wird dann klar, wenn man sie mit der Eigenfrequenz ω_0 der Schwingung vergleicht. Zur Erinnerung:

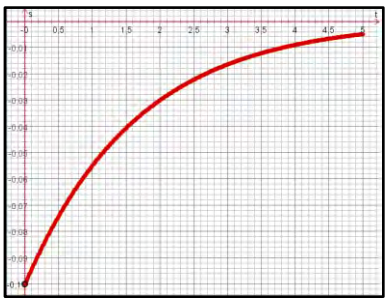
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Aufgabe 2:

a) Verbinde die grafisch dargestellten Dämpfungsfälle mit ihren Bezeichnungen. Berechne jeweils δ und ω_0 und vergleiche sie miteinander, um auch die unteren Kästen zuordnen zu können.







Kriechfall	Schwingfall	aperiodischer Grenzfall
$\omega_0 > \delta$	$\omega_0 = \delta$	$\omega_0 < \delta$

b) Überlege dir für jeden Dämpfungsfall ein Anwendungsgebiet eines nach diesem Prinzip arbeitenden Schwingers.

Die Definition der Abklingkonstanten hat noch einen weiteren Zweck, wie sich zeigen wird.

Aufgabe 3:

a) Erzeuge einen Schwingfall und zeichne die folgende Vergleichsfunktion ein:

$$s_{hüll}(t) = s_0 \cdot \exp(-\delta \cdot t)$$

i Die Funktion $\exp(x) = e^x$ ist eine Exponentialfunktion mit der eulerschen Zahl $e = 2{,}71828\ldots$ als Basis. Sie ist in der Physik ähnlich wichtig wie die Kreiszahl π.

Was fällt dir auf?

i Durch die Dämpfung verändert sich auch die Frequenz der Schwingung. Sie lautet nun

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Erinnerung: Die Formel einer harmonischen Schwingung mit Kreisfrequenz ω lautet

$$s_{harm}(t) = s_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

b) Versuche mithilfe der vorherigen Teilaufgabe eine Funktion für die gedämpfte Schwingung zu finden. Überprüfe sie mithilfe von Newton-II.

$$s_{dämpf}(t) = _____$$

c) Wie lange würde es dauern, bis die Amplitude einer im Schwingfall gedämpften Feder mit Masse m, Federhärte D und Reibungskonstante k nur noch 5% ihrer anfänglichen Auslenkung s_0 beträgt? Finde eine Formel und verifiziere dein Ergebnis mithilfe der Simulation.

d) Inwiefern unterscheidet sich das Modell in diesem Zusammenhang von der Realität?

Zusatzaufgabe: Falls du noch Zeit hast, dann versuche auch den aperiodischen Grenzfall mithilfe einer Funktion zu beschreiben. Tipp: Erzeuge eine kritische Dämpfung und untersuche den Graphen der Funktion $d(t) = s(t)/s_{hüll}(t)$.

$$s_{krit}(t) = _____$$

Feder-Faden-Pendel

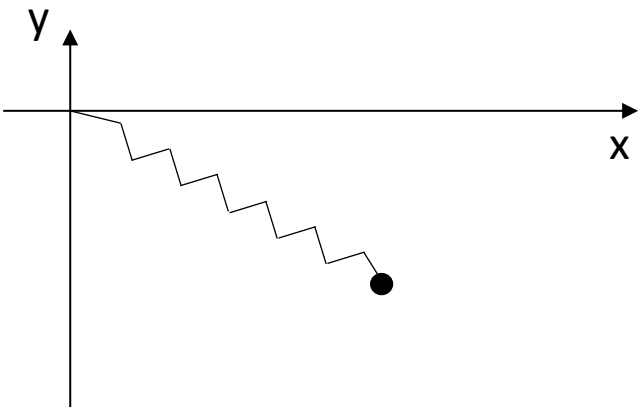


Du hast dich bereits ausführlich mit dem Federpendel beschäftigt. Auch ein Fadenpendel hast du bestimmt schon mal gesehen. Doch was passiert, wenn du diese beiden Pendelarten kombinierst, indem du ein Federpendel zur Seite auslenkst? Wie sehen die resultierenden Schwingungsmuster aus? Und was hat das Ganze mit Schmetterlingen zu tun?

Die folgenden Aufgaben werden dir bei der Erforschung dieser Fragestellungen helfen und dich ein wenig führen. Es bleibt aber auch viel Platz für eigene Erkundungen.

Aufgabe 1: Eine Feder mit einem Massestück ist im Ursprung des Koordinatensystems befestigt.

a) Zeichne die Federkraft und die Gewichtskraft in untenstehende Skizze ein.



b) Zeichne die Gesamtlänge l der Feder ein und gib eine Formel für ihre Berechnung anhand der x- und der y-Koordinate des Massestücks an.

$$l = _____$$

c) Die Feder hat im entspannten Zustand die Länge l_0. Wie lautet folglich die Formel für die Auslenkung s, wenn s bei gedehnter Feder positiv sein soll?

$$s = _____$$

d) Zerlege die Federkraft F_{zug} in zwei Teilkräfte in x- und y-Richtung. Gib diese Kräfte in Abhängigkeit von F_{zug}, l und x bzw. y an.

Tipp: Verwende Sinus und Kosinus am rechtwinkligen Dreieck oder den Strahlensatz.

Aufgabe 2:

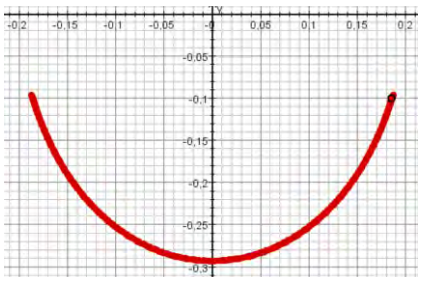
a) Gib die wirkenden Gesamtkräfte an, indem du zusätzlich die Gewichtskraft miteinbeziehst.

$F_x =$ _____ $F_y =$ _____

b) Erstelle damit ein neues zweidimensionales *Newton-II* Projekt. Setze $dt = 0{,}01$ und erstelle Schieberegler mit angemessener Spannbreite für m, l_0 (beide <0,5) und D (<10), sowie für die Startpositionen x_0 und y_0. Lasse ein x-y-Diagramm darstellen.

i

Mit den richtigen Startbedingungen findet man Schwingungen, die sich über einen langen Zeitraum immer gleichbleibend und relativ stabil gegen Änderungen wiederholen. Man bezeichnet sie deshalb als **periodische Schwingung**.



c) Findest du durch Variation der Parameter auch periodische Schwingungsmuster und interessante Formen? Skizziere sie und notiere dir bei manchen die Startwerte.

i

Tipp: Die Masse darf nicht in die Nähe des Aufhängepunkts der Feder kommen.

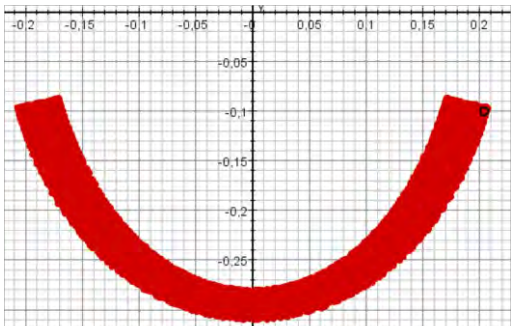
d) Wähle eine deiner Schwingungen aus und überprüfe die geforderten Eigenschaften, indem du Δt erhöhst und die Startpositionen minimal änderst. Betrachte dazu auch die x(t)- und y(t)-Diagramme.

Aufgabe 3:

a) Verändere nun die Startposition deiner periodischen Schwingung ein wenig stärker und beschreibe die resultierende Schwingung. Beachte dabei abermals auch den Verlauf der x(t)- und y(t)-Graphen und die Veränderung bei größerem Δt.

i

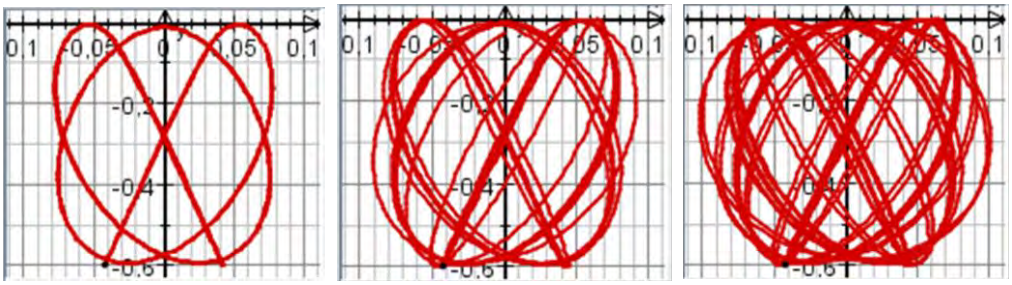
Man nennt die resultierende Schwingungsart in Anbetracht ihrer Eigenschaften auch **quasiperiodische Schwingung**.



b) Begründe diese Namensgebung mithilfe deiner Erkenntnisse aus der vorherigen Teilaufgabe.

Es gibt noch eine dritte Schwingungsart, die sich in keines der bisherigen Schemas einordnen lässt, und vielleicht hast du sie ja sogar bereits entdeck. Gemeinhin bezeichnet man diese Schwingungsart als chaotische Schwingung, was jedoch missverständlich ist, wie wir im Folgenden erörtern werden.

Chaotische Schwingungen treten dann auf, wenn sich das Massestück eng am Aufhängepunkt vorbeibewegt. Sobald dies geschieht, bricht die Bewegung aus ihrem bisherigen Muster aus und verhält sich anschließend augenscheinlich völlig willkürlich.



$\Delta t = 10s$ $\Delta t = 20s$ $\Delta t = 30s$

Aufgabe 4:

a) Erzeuge eine solche chaotisch wirkende Schwingung. Untersuche sie und vergleiche ihre Eigenschaften mit denen einer quasiperiodischen Schwingung. Begründe, warum es sich hierbei um einen anderen Schwingungstyp handeln muss.

Tipp: Welchen Einfluss haben Veränderungen der Startposition? Wie unterscheiden sich die Konturen der Graphen in der x-y-Ebene und wie die der x(t)- und y(t)-Diagramme?

b) Warum ist die Formulierung „chaotisch“ irreführend und inwiefern geht die Bezeichnung **deterministisches Chaos**, die du womöglich schon einmal gehört hast, auf diese Problematik ein?

Tipp: lat. *determinare*: festlegen, Grenzen setzen, begrenzen

Was du hier bei Schwingungen beobachten konntest, ist der Einstieg in ein deutlich weiter gefasstes Themengebiet, dessen Auswirkungen man im Alltag an vielen Stellen beobachten kann. Man verzichtet deshalb auch am Besten gänzlich auf das Wort Chaos und definiert allgemeingültiger.

i

Für gewöhnlich führen in der klassischen Physik ähnliche Ursachen auch zu ähnlichen Wirkungen. Man bezeichnet diesen Zusammenhang als **starke Kausalität**. Es gibt jedoch auch Systeme, bei denen diese starke Kausalität nicht gegeben ist. Hier haben kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen langfristig enorme Auswirkungen auf den weiteren Vorgang. Ein Sinnbild dafür ist die Vorstellung, dass der unscheinbare Flügelschlag eines Schmetterlings andernorts einen Tornado auslösen könnte, weswegen man dieses Phänomen auch **Schmetterlingseffekt** nennt.



c) Fallen dir Beispiele aus dem Alltag ein, bei denen die starke Kausalität verletzt wird? Also z.B. Experimente, die du, auch wenn du alle Fakten kennst, niemals absichtlich mehrfach hintereinander mit dem exakt gleichen Ergebnis durchführen kannst. Begründe!

Warum ist das Werfen eines Würfels kein geeignetes Beispiel?

Zusatzaufgabe: Wie kommt es, dass in diesem Fall auch Änderungen an der Schrittweite dt deutliche Auswirkungen auf die Form des Graphen haben? Benutze zur Erklärung deine Kenntnisse über numerische Lösungsverfahren (Methode der kleinen Schritte).

Erklärung nach §29 LPO-I

Ich versichere an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich, annähernd wörtlich oder dem Sinn nach aus Veröffentlichungen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Des Weiteren erkläre ich, dass ich mich keiner anderen als der angegebenen Literatur oder sonstiger Hilfsmittel bedient habe. Diese Versicherung gilt auch für Abbildungen, Tabellen und ähnliches.
Die vorliegende Arbeit wurde in dieser oder ähnlicher Form an keiner weiteren Prüfungsstelle eingereicht.

Würzburg, den _____ _____